Sitzungsber. Abt. II (1996) 205: 111–140

Über einen Satz von Krasner – 1. Teil

Von

A. Schleiermacher

(Vorgelegt in der Sitzung der math.-nat. Klasse am 25. April 1996
durch das w. M. Ludwig Reich)

Inhalt

Allgemeine Vorbemerkungen

Der Satz von Krasner, von dem hier die Rede ist, kann als einer der Ausgangspunkte der allgemeinen Theorie der Strukturen gelten. Es geht dabei um die zentrale Fragestellung, welche neuen Relationen sich mit rein logischen Hilfsmitteln aus den in einer Struktur vorgegebenen Relationen definieren lassen. Dies sind nach dem Satz von Krasner die unter der Automorphismengruppe der Struktur invarianten Relationen. Hat man also mit Hilfe dieses Satzes die invarianten Relationen bestimmt, so kennt man auch die nicht mehr weiter zerlegbaren unter ihnen, die den Bahnen der Automorphismengruppe entsprechen. Auf diese Weise kann dann das von der Automorphismengruppe ermöglichte Ausmaß an Beweglichkeit in der Struktur bis in jede Einzelheit beschrieben werden.

Die Theorie der Strukturen läßt viele Ausgestaltungen zu. Der Leser kann sich davon überzeugen, wenn er zum Beispiel so unterschiedliche Werke wie Bourbaki [5] oder Plotkin [16] zur Hand nimmt. In der vorliegenden Arbeit wird der Satz von Krasner in drei unterschiedlichen Situationen vorgestellt, die solchen unterschiedlichen Ausgestaltungen der Theorie der Strukturen entsprechen: 1. für endliche rein relationale Strukturen, 2. für Strukturen im Sinne von Krasner, wo die betrachteten Relationen auch unendliche Stellenzahl haben dürfen, 3. für Strukturen im Sinne von José Sebastião e Silva, wo die Relationen nicht nur die Stufe eins haben, also Aussagen über Tupel einer Fundamentmenge entsprechen, sondern wo beliebige Stufen 1, 2, 3 usw. zugelassen sind, also auch Relationen über Relationen der Stufe eins usw.

Die wesentlichen Ergebnisse dieser Arbeit sind nicht neu. Sie entstammen den beiden grundlegenden Arbeiten von Krasner [14] und Sebastião e Silva [22]. Die Darstellung ist jedoch in allen drei Situationen eine eigenständige. Dabei wurde vorallem auf Einfachheit Wert gelegt. Auch sollten die Gemeinsamkeiten der drei unterschiedlichen Strukturtheorien nicht zu kurz kommen. Es ist noch hervorzuheben, daß nicht alle in den beiden genannten Arbeiten von Krasner und Sebastião e Silva enthaltenen Resultate behandelt werden. Insbesondere bleibt die interessante Theorie der Teilstrukturen von Sebastião e Silva hier ganz ausgeklammert.

Zu der Arbeit von Sebastião e Silva, die in portugiesischer Sprache verfaßt ist und lange unveröffentlicht geblieben war, gibt es eine in italienischer Sprache geschriebene Zusammenfassung [21]. A. J. Franco de Oliveira hat diese Zusammenfassung ins Englische übersetzt [8] und dabei in Anmerkungen auch einige grundlagentheoretische Ziele skizziert. Die vorliegende Arbeit verfolgt keine solchen grundlagentheoretischen Ziele. Es wird insbesondere nicht versucht, die Theorie der Strukturen in eine axiomatische Mengenlehre etwa im Sinne von Bernays & Fraenkel [3] oder im Sinne von Bourbaki [5] einzubetten. Der hier eingenommene Standpunkt zur Mengenlehre ist der auch sonst in der Mathematik übliche, der das Hantieren mit Mengen unter Beachtung gewisser Vorsichtsmaßnahmen als gegeben voraussetzt. Die dem Autor sympathischste Form dieses Standpunkts wird besser, als es der Autor selber könnte, in dem Vorwort beschrieben, das Hanfried Lenz seinen Grundlagen der Elementarmathematik [15] vorangestellt hat. Wer darüber hinaus noch nach einer philosophischen Diskussion der mathematischen Grundlagenprobleme sucht, der sei auf das tiefsinnige Werk von Alexander I. Wittenberg [26] hingewiesen.

Die Arbeit ist entstanden als ein Skript zu zwei Vorträgen, die der Autor im Privatissimum von Professor Ludwig Reich in Graz gehalten hat. Den Zuhörern, nämlich den Herren Flor, Fripertinger, Gronau, Reich, Schöpf und Schwaiger, dankt der Autor für lebhafte Diskussionen und für eine Reihe von nützlichen Anregungen, die an verschiedenen Stellen im Text zu Klarstellungen und Erweiterungen geführt haben. Professor Ludwig Reich verdankt der Autor die anfängliche Anregung und die im Fortgang nötige Ermunterung, ohne die diese Arbeit nicht zustandegekommen wäre.

Kapitel I. Endliche Strukturen

1. Relationen über einer Menge *A*, Strukturen

Gegeben sei eine Menge A von Elementen a, b, c, usw. Die Menge A ist zunächst (fast) völlig amorph. Ein Element a läßt sich von einem andern b nicht unterscheiden. Auch Paare lassen sich nicht von andern Paaren unterscheiden – es sei denn, im ersten Paar (a_1, a_2) wären etwa die beiden Elemente identisch, $a_1 = a_2$, im zweiten Paar (b_1, b_2) nicht identisch, $b_1 \neq b_2$. D.h. wir haben außer der Identität und ihrer Negation zunächst keine Beziehungen zwischen den Elementen der Menge A.

Nun, um von der amorphen Struktur der Menge A loszukommen, führen wir Beziehungen zwischen den Elementen ein. Der mathematische Ausdruck dafür ist „Relationen“. Relationen werden wir mit kleinen griechischen Buchstaben bezeichnen, z.B. φ, ψ usw. oder bei zweistelligen Relationen auch oft mit besonderen speziell eingeführten Zeichen, etwa $<$, $=$, $\neq$ usw.

Jede Relation φ hat eine bestimmte Stellenzahl. Die Stellenzahl kann Werte 1, 2, 3, ... im Bereich der natürlichen Zahlen annehmen. Ist s die Stellenzahl der Relation φ und sind $X_1, X_2, \ldots X_s$ unter einander verschiedene Variable, so können wir der Relation φ die Aussageform $\varphi(X_1, X_2, \ldots, X_s)$ zuordnen.

Das will folgendes heißen : wenn wir in der Aussageform die Variablen X_i durch entsprechende Elemente a_i aus der Menge A ersetzen, so erhalten wir eine Aussage $\varphi(a_1, a_2, \ldots, a_s)$, deren Charakteristikum es ist, daß sie wahr sein kann oder auch nicht wahr.

Es kann also für jedes s-Tupel von Elementen $a_1, a_2, ..., a_s$ nur einer von zwei Fällen eintreten:

entweder es gilt $\varphi(a_1, a_2, ..., a_s)$
oder es gilt nicht $\varphi(a_1, a_2, ..., a_s)$.

Wir werden im ersten Fall abkürzend schreiben:

$$\vdash \varphi(a_1, a_2, ..., a_s)$$

dagegen im zweiten Fall:

$$\dashv \varphi(a_1, a_2, ..., a_s)$$

Das Zeichen „$\vdash$" bedeutet also soviel wie „es ist wahr, daß ..." oder „es gilt ... ". Man kann die ganze Zeile auch so lesen : „es ist wahr, daß $a_1, a_2, ...$ a_s in der Relation φ stehen" oder auch einfach „$a_1, a_2, ..., a_s$ stehen in der Relation φ".

Unter einer Struktur S verstehen wir also im folgenden eine Menge A zusammen mit über A definierten Relationen $\varphi_1, \varphi_2, ..., \varphi_r$. Zusammengefaßt : $S = (A, \varphi_1, \varphi_2, ..., \varphi_r)$

Die Menge der zugrundeliegenden Relationen kann auch leer sein, dann haben wir den schon betrachteten Fall einer amorphen Menge, in der aber immer noch die Identität zwischen Elementen gegeben ist. Die Menge der zugrundeliegenden Relationen könnte auch unendlich sein, aber wir werden diesen Fall systematisch erst im folgenden Kapitel betrachten.

Durch diesen Strukturbegriff scheinen geometrische Strukturen etwas bevorzugt vor algebraischen. Bei algebraischen Strukturen geht man ja gewöhnlich von Operationen aus anstatt von Relationen. Da sich aber jede s-stellige über der Menge A definierte Operation auch als $s+1$-stellige Relation auffassen läßt, sind algebraische Strukturen nicht von der Betrachtung ausgeschlossen.

2. Automorphismengruppe einer Struktur *S*

Wir betrachten Funktionen mit Definitionsbereich A und Werten in A, und zwar fordern wir für eine solche Funktion g:
Zu a $\in A$ gibt es genau ein $b \in A$ mit $b = g(a)$. - „g ist eindeutig"
Aus $a \neq b$ folgt $g(a) \neq g(b)$. - „g ist umkehrbar"
Zu $b \in A$ gibt es ein Element a $\in A$ mit $b = g(a)$. - „g ist erschöpfend"
Man spricht in diesem Fall auch gern von Abbildungen. „Bourbaki" folgend nennt man Abbildungen mit diesen drei Eigenschaften bijektiv.

Wir wollen nicht irgendwelche bijektiven Abbildungen der Menge A auf sich betrachten sondern nur solche, die mit der in A gegebenen Struktur verträglich sind. Verträglich heißt hier, daß die der Struktur zugrundeliegenden Relationen nicht zerstört werden dürfen. D.h. wir fordern für jede der Relationen $\varphi = \varphi_i$ $(i = 1, 2, \ldots, r)$:
Aus

$$\vdash \varphi(a_1, a_2, \ldots, a_s)$$

folgt

$$\vdash \varphi(g(a_1), g(a_2), \ldots, g(a_s))$$

und aus

$$\vdash \varphi(g(a_1), g(a_2), \ldots, g(a_s))$$

folgt

$$\vdash \varphi(a_1, a_2, \ldots, a_s).$$

Man sagt in diesem Falle auch, die Relation φ bleibt unter der Abbildung g invariant.[1] Bijektive Abbildungen, welche diese Forderungen erfüllen, heißen Automorphismen der Struktur. Die Gesamtheit der Automorphismen der Struktur S wird mit Aut (S) bezeichnet.

Was läßt sich nun über die Menge Aut (S) aussagen?

i) Die identische Abbildung e mit $e(a) = a$ für alle $a \in A$ ist in jedem Fall ein Automorphismus der Struktur S, wenn auch ein recht trivialer. Also ist die Menge Aut (S) jedenfalls nicht leer.
ii) Seien g, h Automorphismen. Die Funktionskomposition gh ist definiert durch $gh(a) = g(h(a))$ für alle $a \in A$. Man prüft leicht nach, daß gh bijektiv ist, wenn g und h es sind, und daß gh jede Relation invariant läßt, die von g und von h invariant gelassen wird. Somit ist gh ein Automorphismus, wenn g und h Automorphismen sind.

Die Funktionskomposition ist bekanntlich assoziativ. Somit haben wir in der Menge Aut (S) eine assoziative Multiplikation. Die identische Abbildung e ist neutrales Element bezüglich dieser Multiplikation.

[1] Dieser Sprechweise liegt die Vorstellung zugrunde, daß die Abbildung g nicht nur die Elemente der Menge A permutiert, sondern auch die Relationen über A. Wie eine solche Wirkung der Abbildung g auch auf Relationen definiert werden kann, werden wir in Kapitel II und Kapitel III sehen.

Es ist übrigens leicht zu sehen, daß man für endliche Mengen A nur eine von den beiden angegebenen Bedingungen benötigt, da sie für endliche Mengen und bijektive Abbildungen miteinander gleichwertig sind.

iii) Ist g ein Automorphismus von S, so ist es auch die inverse Abbildung g^{-1}. Dazu muß man zeigen, daß jede unter g invariante Relation auch unter g^{-1} invariant ist.

Nehmen wir an $\vdash \varphi(a_1, a_2, \ldots, a_s)$

Dann gibt es eindeutig bestimmte Elemente $b_1, b_2, \ldots, b_s$ in A, so daß $a_1 = g(b_1)$, $a_2 = g(b_2)$, usw. Also ergibt sich durch Substitution

$$\vdash \varphi(g(b_1), g(b_2), \ldots g(b_s))$$

Daraus folgt $\vdash \varphi(b_1, b_2, \ldots, b_s)$

$$\text{Aber } b_i = g^{-1}(a_i) \text{ also } \vdash \varphi(g^{-1}(a_1), g^{-1}(a_2), \ldots, g^{-1}(a_s))$$

Der umgekehrte Teil der Forderung, der noch nötig ist, läßt sich ebenfalls leicht zeigen. Damit haben wir also in Aut (S) ein assoziatives Produkt mit Einselement und Inversen. Mit anderen Worten : Aut (S) ist eine Gruppe.

Wir sagen unbefangen „Aut (S) hat die Struktur einer Gruppe“. Dabei ist zu bedenken, daß man die zweistellige Gruppenoperation durch eine Relation „... ist Produkt von ... und ...“ ersetzen kann. Die einstellige Operation $^{-1}$ läßt sich durch die Relation „... ist Inverse von ...“ ersetzen.

3. Drei miteinander verwandte Fragestellungen

Wir wollen jetzt unser Augenmerk auf die drei Fragestellungen[2] richten, die uns im folgenden leiten werden:

Frage 1. Welche weiteren Relationen über A lassen sich allein mit logischen Mitteln aus den gegebenen Relationen ableiten?

Frage 2. Welche weiteren Relationen über A bleiben invariant unter allen Automorphismen der gegebenen Struktur?

Frage 3. Welche Relationen über $G =$ Aut (S) lassen sich aus den Relationen der Struktur S und aus der Wirkung der Gruppenelemente ableiten?

Beispiel zu Frage 1. Sei A die Menge der reellen Zahlen, S die Struktur, die wir erhalten, wenn nur die einzige Relation $<$ zugrundegelegt wird. Welche weiteren Relationen lassen sich aus $<$ definieren? Zum Beispiel

[2] Die Fragen sind in dieser Form naiv, wie wir bei weiterer Beschäftigung damit noch sehen werden. Aber der Fragende hat ein gewisses Recht auf Naivität.

die „Zwischenbeziehung“

$$\zeta(x, y, z) \leftrightarrow (x < y \wedge y < z) \vee (z < y \wedge y < x).$$

Die Zwischenbeziehung ζ ist aus mehreren Gründen interessant. Die bijektiven Abbildungen von $A = \mathbf{R}$, die ζ invariant lassen, sind bekanntlich die stetigen bijektiven Abbildungen von $\mathbf{R}$ auf sich. Das sind mehr als die monoton wachsenden, welche $<$ invariant lassen.

Zum andern erhalten wir einen Hinweis, wie wir vorzugehen haben : die Definition ist aufgebaut aus den logischen Konnektiven $\wedge$ und $\vee$ sowie aus Aussageformen, $x < y$, $y < z$, usw., die man mittels der zugrunde gelegten Relation $<$ bilden kann.

Jede Abbildung, bei welcher die Relation $<$ invariant bleibt, läßt offensichtlich auch die Zwischenbeziehung invariant. Wir werden also vermuten, daß dies allgemein gilt : jeder Automorphismus einer Struktur S läßt auch alle Relationen invariant, die sich allein mit logischen Hilfsmitteln aus den Grundrelationen der Struktur ableiten lassen. Ob davon auch die Umkehrung gilt, ist noch eine weitere Frage: d.h. sind die unter Aut (S) invarianten Relationen vielleicht etwa gerade diejenigen, die sich allein mit logischen Hilfsmitteln aus den gegebenen Relationen der Struktur S ableiten lassen?

Damit haben wir einen Blick für die möglichen Beziehungen zwischen den Fragestellungen 1) und 2) gewonnen. Die dritte Fragestellung 3) ist offensichtlich analog zu 1) aber für einen anderen Anwendungsbereich gestellt. Betrachten wir noch Beispiele zu 3).

Erstes Beispiel zu 3

S sei die euklidische Ebene. In S ist als eine der Grundrelationen gegeben die Kongruenz $\cong$ von Strecken. Aut (S) ist bekanntlich die Gruppe der Ähnlichkeitstransformationen. Für jede Ähnlichkeitstransformation g gilt $PQ \cong P_1Q_1 \leftrightarrow g(P)g(Q) \cong g(P_1)g(Q_1)$.

In $G = \text{Aut}\ (S)$ gibt es spezielle Ähnlichkeitstransformationen, die nicht nur jede Figur in eine dazu ähnliche überführen, sondern in eine dazu kongruente (d.h. deckungsgleiche). Sie heißen Bewegungen. Für die Bewegungen g gilt : $PQ \cong g(P)g(Q)$ für alle Punkte P, Q.

Somit haben wir eine Definition der Bewegungen innerhalb der Ähnlichkeitstransformationen unter Zuhilfenahme der Relation $\cong$ und der Wirkung der Gruppenelemente g auf die Punkte.

4. Ableitbarkeit von Relationen

Wir wollen uns jetzt mit der Fragestellung 1) beschäftigen und uns durch Beispiele und daran anknüpfende Überlegungen an eine Antwort herantasten. Natürlich ist die Fragestellung nicht von der Art, daß es ohne Zweifel nur eine eindeutige Antwort geben müßte. Die Antwort, die wir uns geben können, wird davon abhängen, was wir unter „rein logischen Hilfsmitteln" verstehen wollen.[3]

Wir hatten schon gesehen : zu jeder Relation gehören gewisse Aussageformen. Aussageformen lassen sich mit den Mitteln logischer Kalküle zu neuen Aussageformen verknüpfen. Betrachten wir dazu zunächst noch ein weiteres Beispiel. Sei A die Menge $\{1, 2, 3, 4, 5\}$. Eine Relation läßt sich dadurch festlegen, daß man alle Tupel aufschreibt, für welche sie erfüllt sein soll. Sei also ρ die 2-stellige Relation, die genau für die folgenden Paare erfüllt ist:

$\{(1, 2), (2, 3), (3, 4), (4, 5), (5, 1)\}$. In Abb. 1 ist das durch die mit Pfeilen versehenen Kanten des Fünfecks angedeutet.

Zu ρ bilden wir mit zwei Variablen x, y die Aussageform $\rho(x, y)$ und betrachten die neue Aussageform $(\exists z)\,(\rho(x, z) \wedge \rho(z, y))$. Sie definiert eine neue Relation, die im Bild durch die Diagonalen im Fünfeck angedeutet ist.

In den bisherigen Beispielen hatten wir nur Verknüpfungen von Aussageformen durch logische Konnektive. Das letzte Beispiel zeigt jedoch, daß eine Beschränkung auf den logischen Kalkül der Aussagenlogik zu eng wäre. Wir werden also mindestens mit dem Prädikatenkalkül erster Stufe zu arbeiten haben.

Versuchen wir nun, die Beispiele zu verallgemeinern. Dazu müssen wir Regeln aufstellen, wie wir aus gegebenen zulässigen Relationen neue

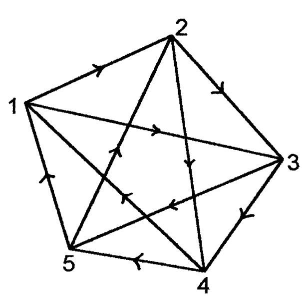

Abb. 1

[3] Man müßte also, um genauer zu sein, die Art der logischen Hilfsmittel noch näher spezifizieren.

bilden dürfen. Den Ausgangspunkt bilden dabei die der Struktur S zugrundeliegenden Relationen $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_r$ sowie die Identität $=$.

Das geht am besten, wenn wir zunächst nur logische Formeln (also Aussageformen) bilden, und dann sagen, wie diese als Relationen interpretiert werden sollen. Das Alphabet, aus dem wir die logischen Formeln bilden, besteht aus den Relationszeichen $\varphi_1, \ldots, \varphi_r$, den logischen Zeichen $= \ \wedge \ \neg \ \exists$ sowie den Hilfszeichen, () und aus einem abzählbar unendlichen Vorrat an Zeichen $Z_1, Z_2, \ldots$ für Variable.

Die Bildungsregeln sind die Regeln für die Bildung von Formeln in einem rein relationalen Prädikatenkalkül erster Stufe.

F1) Sind X_1 und X_2 irgendwelche Variable (d.h. irgendwelche der Zeichen $Z_1, Z_2, \ldots$), so ist $X_1 = X_2$ eine Formel.

F2) Sind $X_1, X_2, \ldots, X_{s(i)}$ irgendwelche Variable (irgendwelche der Zeichen $Z_1, Z_2, \ldots$) und ist $s(i)$ die Stellenzahl der Relation φ_i so sind $\varphi_i(X_1, X_2, \ldots, X_{s(i)})$ Formeln für $i = 1, 2, \ldots, r$. Die Formeln der durch F1) oder F2) gegebenen Gestalt heißen Primformeln.

F3) Ist Φ eine Formel, so ist auch (Φ) eine Formel.

F4) Sind Φ_1 und Φ_2 Formeln, so ist auch $\Phi_1 \wedge \Phi_2$ eine Formel.

F5) Ist Φ eine Primformel oder eine Formel der Gestalt (Ψ), so ist auch $\neg\,\Phi$ eine Formel.

F6) Ist Φ eine Primformel oder eine Formel der Gestalt (Ψ), und ist X eine beliebige Variable, so ist auch $(\exists X)\,\Phi$ eine Formel.

Freie Variable sind diejenigen Variablen einer Formel, die nicht im Wirkungsbereich eines Quantors stehen. Die übrigen Variablen heißen gebundene Variable.

Sei nun Φ eine Formel und seien $Y_1, Y_2, \ldots, Y_s$ die freien Variablen, die in Φ vorkommen, in irgendeiner fest vorgegebenen Reihenfolge. Für die Interpretation der Formel als Relation ρ über A ist die Reihenfolge wesentlich. Wir deuten das durch die Bezeichnung

$$\rho := \Phi|_{Y_1, Y_2, \ldots, Y_s} \text{ an.}$$

Wenn wir in Φ für jede der freien Variablen Y_i eine Substitution $Y_i \rightarrow a_i$ mit a_i in A vornehmen, so wird aus der Aussageform Φ eine Aussage mit eindeutig bestimmtem Wahrheitswert, die wir mit

$$\Phi|_{Y_1 \rightarrow a_1, Y_2 \rightarrow a_2, \ldots, Y_s \rightarrow a_s} \text{ bezeichnen.}$$

Die Interpretation der Formel Φ als Relation $\Phi|_{Y_1, Y_2, \ldots, Y_s}$ über A bei der gegebenen Reihenfolge der freien Variablen ist dann wie folgt definiert : $\vdash \Phi|_{Y_1, Y_2, \ldots, Y_s}$ $(a_1, a_2, \ldots, a_s)$ dann und nur dann, wenn die Aussage $\Phi|_{Y_1 \to a_1, Y_2 \to a_2, \ldots, Y_s \to a_s}$ wahr ist.

Definition. Wir nennen die Relation φ aus $\varphi_1, \ldots, \varphi_r$ ableitbar, wenn es eine Formel Φ mit freien Variablen $Y_1, \ldots, Y_s$ gibt, so daß $\varphi := \Phi|_{Y_1, Y_2, \ldots, Y_s}$.

Mit dieser Definition haben wir, so scheint es, eine sinnvolle Antwort auf die Fragestellung 1) gefunden. In welchem Zusammenhang diese Antwort wirklich befriedigend ist, darüber werden wir später noch mehr erfahren.

Als erstes machen wir die Beobachtung:

Satz 1. Ist φ aus $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_r$ ableitbar, so bleibt die Relation φ unter allen Automorphismen der Struktur $S = S(A, \varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_r)$ invariant.

Der Beweis des Satzes erfolgt durch Induktion über den Formelaufbau und ist nicht schwierig. Wir wollen hier nicht näher darauf eingehen. Dieser Satz ist im übrigen im allgemeinen Bewußtsein so sehr zu einer Selbstverständlichkeit geworden, daß man kaum wagt, ihn an die Tafel zu schreiben.

Merkwürdigerweise ist aber weit weniger bekannt, wie es mit der Umkehrung der Aussage dieses Satzes steht. Wenn eine Relation φ unter allen Automorphismen der Struktur S invariant bleibt, ist sie dann aus $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_r$ ableitbar? Das bringt uns zum nächsten Punkt.

5. Der Satz von Krasner (für endliche Strukturen)

Der Satz von Krasner [14] befaßt sich in seiner ursprünglichen Form mit den invarianten Relationen einer beliebigen Permutationsgruppe G, die auch unendlich sein kann. Er gibt ein Kriterium dafür an, daß eine beliebige Menge von Relationen gerade die Menge aller invarianten Relationen einer Permutationsgruppe G ist. Das Kriterium ist die Abgeschlossenheit gegenüber gewissen Operationen, die für Relationen in der zitierten Arbeit von Krasner definiert sind. Dabei zieht Krasner auch Relationen unendlicher Stellenzahl in Betracht. Wir haben uns in diesem einleitenden Kapitel von vornherein auf Relationen endlicher Stellenzahl beschränkt und wollen uns im folgenden nun auch auf endliche Strukturen beschränken.

Von jetzt ab seien also alle Strukturen endlich. Dann sind selbstverständlich auch die Automorphismengruppen endlich. Dem Satz von Krasner läßt sich dann folgende Form geben[4,5] (vgl. [12], [17] und [4]):

Satz 2 (Hauptsatz von Krasner). Sei A eine endliche Menge und S die Struktur $S = S(A, \varphi_1, ..., \varphi_r)$. Eine Relation φ ist genau dann invariant unter allen Automorphismen von S, wenn sie aus den Relationen $\varphi_1, \varphi_2, ..., \varphi_r$ ableitbar ist.

Wir wollen aus diesem Satz noch ein Korollar ableiten. Es bezeichne G die Automorphismengruppe Aut (S).

Betrachten wir zwei m-Tupel $a_1, a_2, ..., a_m$ und $b_1, ..., b_m$ von Elementen aus A. Dann können wir uns fragen, ob es ein Gruppenelement g gibt, welches das erste m-Tupel in das zweite überführt. Das ist sicher dann nicht der Fall, wenn zum Beispiel $a_1 = a_2$ aber $b_1 \neq b_2$, oder allgemeiner, wenn es eine aus $\varphi_1, \varphi_2, ..., \varphi_r$ ableitbare Relation φ gibt, so daß $\vdash \varphi(a_1, a_2, ..., a_r)$ aber $\dashv \varphi(b_1, b_2, ..., b_r)$.

Definition. a) Zwei m-Tupel $a_1, a_2 ..., a_m$ und $b_1, b_2, ..., b_m$ heißen äquivalent bezüglich der Permutationsgruppe G, wenn es ein $g \in G$ gibt mit $b_i = g(a_i)$ für $i = 1, 2, ..., m$.
b) Zwei m-Tupel $a_1, a_2, ..., a_m$ und $b_1, b_2, ..., b_m$ heißen (in der Struktur S) logisch äquivalent, wenn für jede aus $\varphi_1, ..., \varphi_r$ ableitbare m-stellige Relation φ entweder

$$\vdash \varphi(a_1, a_2, ..., a_m) \quad \text{und} \quad \vdash \varphi(b_1, b_2, ..., b_m)$$

[4] Der Satz von Krasner [14] hat eine etwas verwickelte Geschichte. Als erster hat wohl José Sebastião e Silva in seinen lange vergessen gebliebenen Arbeiten [21] und [22] die formale Logik auf die Problemstellung von Krasner angewendet allerdings ohne die Arbeit von Krasner zu kennen. Er hat dabei die wesentlichen Resultate von Krasner in anderer Form wiederentdeckt.

In der hier angegebenen Form wurde der Satz von Krasner zuerst in der Arbeit [4] von Bodnarčuk, Kalužnin, Kotov und Romov ausgesprochen und bewiesen. In Arbeiten von Lew A. Kalužnin und seinen Schülern wurde diese Form des Satzes auf zahlreiche Probleme der Algebra und Kombinatorik angewendet. Hierüber kann man sich in den beiden Büchern [12] von Klin, Pöschel und Rosenbaum und [17] von Kalužnin und Pöschel orientieren.

Das meiste, was in Kapitel I behandelt ist, kann man ebenfalls dort nachlesen.

Interessante weiterführende Anwendungen aus diesem Ideenkreis findet man in [7] und [11].

[5] Ein analoger Satz läßt sich auch für Endomorphismen einer Struktur aussprechen. Dann muß man den Begriff einer invarianten Relation so erweitern, daß nur die erste der beiden Bedingungen aus §2 gefordert wird. Man beachte dabei, daß für nichtumkehrbare Abbildungen (oder für unendliche Mengen A) die zweite Bedingung nicht mehr aus der ersten folgt. Die zur Ableitung von Relationen zugelassenen Hilfsmittel sind dagegen auf die Weise einzuschränken, daß die Negation von Formeln nicht mehr verwendet wird (vgl. [17], Kapitel 1.3).

oder

$$\dashv \varphi(a_1, a_2, \ldots, a_m) \quad \text{und} \quad \dashv \varphi(b_1, b_2, \ldots, b_m)$$

Teil b) der obenstehenden Definition besagt also, daß sich die beiden m-Tupel mit den in der Struktur S gegebenen logischen Mitteln nicht unterscheiden lassen.

Korollar zum Satz von Krasner (Beweglichkeitsprinzip). Die m-Tupel $a_1, a_2, \ldots, a_m$ und $b_1, b_2, \ldots, b_m$ sind genau dann äquivalent bezüglich der Gruppe $G = \mathrm{Aut}\,(S)$, wenn sie in der Struktur S logisch äquivalent sind.

Zum Beweis betrachtet man die Bahn des m-Tupels $a_1, a_2, \ldots, a_m$ unter der Gruppe $G = \mathrm{Aut}(S)$. Die Bahn besteht definitionsgemäß aus allen m-Tupeln $g(a_1), g(a_2), \ldots, g(a_m)$, wobei g die Gruppe G durchläuft. Der Bahn entspricht eine Relation β, die für ein m-Tupel genau dann erfüllt ist, wenn das m-Tupel zur Bahn gehört:
$\vdash \beta(c_1, c_2, \ldots, c_m)$ dann und nur dann, wenn es ein $g \in G$ gibt mit

$$c_1 = g(a_1),\ c_2 = g(a_2), \ldots,\ c_m = g(a_m).$$

Nun seien $a_1, a_2, \ldots, a_m$ und $b_1, b_2, \ldots, b_m$ in der Struktur S logisch äquivalent. Dann betrachten wir die der Bahn entsprechende Relation β. Man sieht leicht, daß β unter G invariant ist. Nach dem Satz von Krasner ist β daher aus $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_r$ ableitbar. Demnach dürfen sich nach Voraussetzung $a_1, a_2, \ldots, a_m$ und $b_1, b_2, \ldots, b_m$ nicht durch β unterscheiden lassen. Selbstverständlich liegt das m-Tupel $a_1, a_2, \ldots, a_m$ in seiner eigenen Bahn, denn es gilt $a_1 = e(a_1)$, $a_2 = e(a_2)$ usw. Daraus folgt

$$\vdash \beta(a_1, a_2, \ldots, a_m).$$

Somit gilt auch

$$\vdash \beta(b_1, b_2, \ldots, b_m).$$

Also liegt das m-Tupel $b_1, b_2, \ldots, b_m$ in der Bahn von $a_1, a_2, \ldots, a_m$ und das heißt nichts anderes, als daß die beiden m-Tupel äquivalent sind bezüglich G.

Nehmen wir nun an, $a_1, a_2, \ldots, a_m$ und $b_1, b_2, \ldots, b_m$ seien äquivalent bezüglich der Gruppe G. Betrachten wir nun irgendeine m-stellige aus $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_r$ ableitbare Relation φ. Nun bleibt φ unter allen Abbildungen g der Gruppe G invariant. Da nun $b_1 = g(a_1)$, $b_2 = g(a_2)$ usw. für ein passendes g, so folgt

$$\vdash \varphi(b_1, b_2, ..., b_m), \text{ wenn}$$
$$\vdash \varphi(a_1, a_2, ..., a_m) \text{ und}$$
$$\dashv \varphi(b_1, b_2, ..., b_m), \text{ wenn}$$
$$\dashv \varphi(a_1, a_2, ..., a_m).$$

D.h. in keinem Fall lassen sich die beiden m-Tupel durch φ unterscheiden. Mithin sind sie logisch äquivalent.

Beweis des Satzes von Krasner

Zum Beweis benötigen wir fünf einfache Hilfssätze[6].

(5.1) Ableitbarkeit ist eine transitive Beziehung, d.h. sind die Relationen $\psi_1, \psi_2, ..., \psi_i$ aus $\varphi_1, \varphi_2, ..., \varphi_r$ ableitbar und ist ψ aus $\psi_1, \psi_2, \dots \psi_i$ ableitbar, so ist ψ auch aus $\varphi_1, \varphi_2, \dots \varphi_r$ ableitbar.

Dies erkennt man daraus, daß es für die Neubildung von Formeln und für die Interpretation von Formeln als Relationen keinen Unterschied macht, ob man mit Primformeln $\varphi_j(X_1, ..., X_s)$ beginnt oder bereits mit zusammengesetzen Ausdrücken für diese Primformeln.

(5.2) Jede m-stellige unter G invariante Relation α ist aus Relationen ableitbar, die genau für die m-Tupel einer Bahn erfüllt sind.

Ist nämlich α für ein m-Tupel $a_1, a_2, ..., a_m$ erfüllt, so ist α auch für alle m-Tupel der Bahn von $a_1, a_2, ..., a_m$ erfüllt. Es können aber nur endlich viele Bahnen auf diese Weise in α enthalten sein, etwa $\beta_1, ..., \beta_i$. Zur Ableitung von α aus den Bahnen genügt dann das Konnektiv $\vee$, das eine Abkürzung ist für $\neg(\neg ... \wedge \neg ...)$.

(5.3) Zu jedem m-Tupel $a_1, ..., a_m$ gibt es eine eindeutig bestimmte minimale aus $\varphi_1, ..., \varphi_r$ ableitbare Relation φ mit den Eigenschaften:

i) $\vdash \varphi(a_1, a_2, ..., a_m)$ und
ii) aus $\vdash \varphi(b_1, b_2, ..., b_m)$ für irgendein m-Tupel $b_1, b_2, ..., b_m$ folgt $\vdash \psi(b_1, b_2, ..., b_m)$ für jede aus $\varphi_1, ..., \varphi_r$ ableitbare Relation ψ, für welche $\vdash \psi(a_1, a_2, ..., a_m)$.

Zum Beweis von (5.3) betrachtet man alle möglichen Relationen φ mit der unter i) geforderten Eigenschaft. Es können nur endlich viele sein, und daher kann man aus ihnen mit den gleichen Variablen erhaltene Aussageformen durch das Konnektiv $\wedge$ verknüpfen.

[6] In der Literatur sind mehrere Beweise für diese Form des Satzes von Krasner veröffentlicht worden (vgl. [4], [10] und [18]). Der Beweis in [18] stützt sich auf einen bekannten modelltheoretischen Satz von Kochen [13]. Der hier gegebene Beweis hat am meisten Ähnlichkeit mit dem Beweis in [10].

Sei nun $|A| = n$ und betrachten wir die Elemente von A in einer fest vorgegebenen Reihenfolge : $a_1, a_2, \ldots, a_n$.

Für dieses n-Tupel existiert nach (5.3) die minimale ableitbare Relation φ mit der Eigenschaft, daß $\vdash \varphi(a_1, a_2, \ldots, a_n)$.

Betrachten wir nun ein beliebiges n-Tupel $b_1, b_2, \ldots, b_n$ mit $\vdash \varphi(b_1, b_2, \ldots, b_n)$.

Wegen der Minimalität von φ gilt dann $b_i \neq b_j$ für $i, j = 1, 2, \ldots, n$. Die Abbildung g mit $g(a_i) = b_i$ für $i = 1, 2, \ldots, n$ ist deshalb bijektiv. Wir behaupten:

(5.4) $g \in G = \text{Aut}(S)$.

Angenommen g ließe eine der Relationen $\varphi_1, \ldots, \varphi_r$ nicht invariant, etwa φ_i, und sei $s = s(i)$ die Stellenzahl von φ_i. Dann gäbe es Elemente $a_{j(1)}, a_{j(2)}, \ldots, a_{j(s)}$, so daß

$$\vdash \varphi_i(a_{j(1)}, a_{j(2)}, \ldots, a_{j(s)}) \text{ aber}$$

$$\dashv \varphi_i(g(a_{j(1)}), g(a_{j(2)}), \ldots, g(a_{j(s)})).$$

Nun ist $g(a_{j(1)}) = b_{j(1)}, g(a_{j(2)}) = b_{j(2)}$ usw. Also folgte

$$\dashv \varphi_i(b_{j(1)}, b_{j(2)}, \ldots, b_{j(s)}.$$

Betrachten wir nun die ableitbare Relation

$$\psi := (\varphi(Y_1, \ldots, Y_n) \wedge \varphi_i(Y_{j(1)}), \ldots, Y_{j(s)}))|_{Y_1, Y_2, \ldots, Y_n}$$

dann würde sich ergeben

$$\vdash \psi(a_1, a_2, \ldots, a_n) \text{ aber } \dashv \psi(b_1, b_2, \ldots, b_n).$$

Dies widerspricht der Minimalität von φ.

(5.5) Umgekehrt besteht $G = \text{Aut}(S)$ auch nur aus Abbildungen wie den in (5.4) betrachteten. Dies ist deswegen so, weil die Relation φ unter G invariant ist.

Wegen (5.1) und (5.2) genügt es nun zu beweisen, daß für beliebige Stellenzahl m jede m-stellige Bahn aus φ ableitbar ist. Dazu betrachten wir ein m-Tupel $c_1, c_2, \ldots, c_m$. Es gilt $c_1 = a_{j(1)}, c_2 = a_{j(2)}, \ldots, c_m = a_{j(m)}$ für eine passende Funktion $i \to j(i)$.

Die Bahn von $c_1, c_2, \ldots, c_m$ besteht nach (5.4) und (5.5) genau aus denjenigen m-Tupeln $b_{j(1)}, b_{j(2)}, \ldots, b_{j(m)}$, für welche ein n-Tupel $b_1, \ldots, b_n$ existiert mit

$$\vdash \varphi(b_1, \ldots, b_n).$$

Die entsprechende Relation β ist aber aus φ ableitbar. Um das einzusehen bilden wir die Formel Φ: $\varphi(Y_1, Y_2, .., Y_n) \wedge X_1 = Y_{j(1)} \wedge \ldots \wedge X_m = Y_{j(m)}$ in den freien Variablen $Y_1, Y_2, \ldots, Y_n$ und $X_1, X_2, \ldots, X_m$. Die freien

Variablen binden wir durch Quantoren $(\exists\, Y_1)$, $(\exists\, Y_2)$ usw. Man überzeugt sich nun leicht, daß

$$(\exists\, Y_1)\,((\exists\, Y_2) \ldots (\exists\, Y_n)\,\Phi) \ldots)\,|_{X_1, X_2, \ldots, X_m}$$

die gewünschte Ableitung von β aus φ ist.

Kapitel II. Die Krasnersche Algebra der Relationen

1. Einführung

In diesem Kapitel wird es uns darum gehen, die in Kapitel I eingeführten Fragestellungen auch im Unendlichen zu untersuchen. Wir werden uns dabei hauptsächlich auf die grundlegende Arbeit von Krasner [14] stützen und uns auch in den Bezeichnungen nicht allzu weit von Krasners sparsamen Konventionen entfernen.

Permutationen wollen wir links von den permutierten Objekten schreiben wie bei der in Kapitel I verwendeten funktionalen Schreibweise. Jedoch werden wir die Klammern um das Argument häufig der Kürze halber weglassen. Wird irgendeine Operation wie $^\sim$, $*$, λ, w usw. auf Elemente x, y, z, r, angewendet wie z.B. in $x^\sim$, $y*$, $z\lambda$, r^w usw. und sind X, Y, Z, R, abgeleitete Objekte wie zum Beispiel Mengen, Relationen, usw., auf denen analoge abgeleitete Operationen definiert werden können, so verwenden wir auch für die abgeleiteten Operationen die entsprechenden Bezeichnungsweisen wie $X^\sim$, $Y*$, $Z\lambda$, R^w usw.

Wirkung einer Gruppe auf eine Menge

Seien gegeben eine Gruppe G und eine beliebige nichtleere Menge X.

Eine Abbildung $(g, x) \to g \circ x$, die jedem Paar (g, x) mit $g \in G$, $x \in X$ ein eindeutig bestimmtes Element $g \circ x \in X$ zuordnet, heißt Wirkung der Gruppe G auf der Menge X, wenn folgende Bedingungen erfüllt sind:

(w1) $g \circ (h \circ x) = (gh) \circ x$,
(w2) bezeichnet e das neutrale Element der Gruppe, so gilt $e \circ x = x$ für alle $x \in X$.

Ist $(g, x) \to g \circ x$ eine Wirkung, so sind die folgenden Aussagen leicht einzusehen.
(1.1) Für jedes feste $g \in G$ sind $x \to g \circ x$ und $x \to g^{-1} \circ x$ zueinander inverse Abbildungen der Menge X.
(1.2) Sei U eine beliebige Untermenge der Menge X. Dann bilden die $g \in G$, die U elementweise festlassen eine Untergruppe G_U von G.

Wenn eine Wirkung der Gruppe G auf einer Menge X gegeben ist, so werden wir auch sagen: „G wirkt auf der Menge X“.

Sei $(g, x) \to g \circ x$ eine Wirkung und betrachten wir die Relation $x \cong_G y$, die genau dann erfüllt ist, wenn es ein Element $g \in G$ gibt, so daß $g \circ x = y$. Es gilt $x = e \circ x$, also $x \cong_G x$. Ist $x = g \circ y$, so folgt $g^{-1} \circ x = g^{-1} \circ (g \circ y) = e \circ y = y$ und daher ist die Relation $\cong_G$ symmetrisch. Ist schließlich $x = g \circ y$, $y = h \circ z$, so folgt $x = g \circ (h \circ z) = (gh) \circ z$ und somit ist die Relation $\cong_G$ auch transitiv; sie ist also eine Äquivalenzrelation. Die Klassen bezüglich $\cong_G$ nennt man auch Bahnen.

(1.3) Sei x ein beliebiges Element von X. Die das Element x enthaltende Bahn ist gleich der Menge $G \circ x = \{g \circ x : g \in G\}$.

Die Wirkung $(g, x) \to g \circ x$ wird effektiv (oder treu) genannt, wenn G_U für die Untermenge $U = X$ die triviale Untergruppe von G ist, die nur aus dem Einselement e der Gruppe besteht. Wir werden in diesem Fall auch sagen, G wirke effektiv (oder treu) auf der Menge X. Wir werden uns im folgenden nur mit effektiven Wirkungen beschäftigen.

Permutationen and Permutationsgruppen

Bijektive Abbildungen einer Menge X auf sich heißen auch Permutationen. (Dies ist in Wirklichkeit die ältere Benennung.) Die Funktionskomposition zweier Permutationen ist wieder eine Permutation. Die Funktionskomposition der identischen Abbildung e mit irgendeiner Permutation g ist unabhängig von der Reihenfolge der Faktoren gleich g. Ferner liefert die Funktionskomposition einer Permutation g mit ihrer Inversen g^{-1} die identische Abbildung. Da die Funktionskomposition bekanntermaßen assoziativ ist, bilden die Permutationen der Menge X also eine Gruppe bezüglich der Funktionskomposition als Gruppenoperation. Sie wird die symmetrische Gruppe auf der Menge X genannt und durch Sym (X) bezeichnet.

Sei nun G eine Untergruppe von Sym (X). Für jedes $g \in G$ und jedes $x \in X$ gibt es dann das eindeutig bestimmte Bild $g(x)$ des Elementes x unter der Abbildung g. Man sieht nun sofort, daß die Abbildung $(g, x) \to g(x)$ die Eigenschaften einer effektiven Wirkung hat.

Sei $g \in$ Sym (X). Die Bahnen der zyklischen Untergruppe $\langle g \rangle$ heißen auch Zyklen der Permutation g. Die Bahn eines Elementes $x \in X$ besteht aus den Elementen $g^i x$, wobei i alle ganzen Zahlen durchläuft. Wenn irgendzwei von diesen Elementen zusammenfallen, $g^i x = g^j x$, so folgt $g^{i-j} x = x$.

Wir können annehmen, daß $i - j > 0$. Sei n die kleinste nichtnegative Zahl, für welche $g^n x = x$. Dann sind $g^0 x = x$, $g^1 x, g^2 x, \ldots, g^{n-1} x$ alle untereinander verschieden. Ist $g^i x$ gegeben, so erhalten wir mit Hilfe des

Euklidischen Algorithmus $i = sn + r$ mit $0 \le r < n$. Es folgt $g^i x = g^r(g^{sn}(x)) = g^r x$ und die Bahn besteht aus den Elementen $g^r x$, wo $0 \le r < n$. Wir können uns demnach die Elemente $x = x_0, x_1, \ldots$ eines endlichen Zyklus immer so indiziert denken, daß $gx_i = x_{i+1}$ und $gx_{n-1} = x_0$. Wenn keine zwei Elemente $g^i x$ und $g^j x$ für ganze Zahlen $i \neq j$ zusammenfallen, so erhalten wir einen unendlichen Zyklus. Dessen Elemente denken wir uns so indiziert, daß $x_i = g^i x$. Dann folgt ähnlich wie oben für endliche Zyklen die Beziehung $gx_i = x_{i+1}$ aber diesmal für alle ganzen Zahlen i.

2. Relationen beliebiger Stellenzahl

Es seien gegeben:
a) eine Kardinalzahl Ω_0,
b) zu jeder Kardinalzahl $\Omega < \Omega_0$ eine Menge U_Ω der Mächtigkeit $|U| = \Omega$,
c) zu jeder Untermenge $W \subseteq U_\Omega$ eine Bijektion e_W von W auf die Menge $U_{|W|}$.

In diesen Festsetzungen liegt eine zum Teil (jedoch nicht ganz) vermeidbare Willkür.[7] Da jede Menge wohlgeordnet werden kann, gibt es zu jeder Mächtigkeit Ω eine kleinste mögliche Ordnungszahl. Sie heißt Anfangszahl zu Ω und wird mit $a(\Omega)$ bezeichnet. Die Menge der Ordnungszahlen $\nu < a(\Omega)$ ist wohlgeordnet vom Ordnungstyp $a(\Omega)$ und hat die Mächtigkeit Ω. Wir können unsere Auswahl so treffen, daß U_Ω gerade diese Menge wird. Wenn nun $\Omega_1 \le \Omega_2$, so wird bei dieser Auswahl $U_{\Omega_1} \subseteq U_{\Omega_2}$.

Eine beliebige Untermenge $W \subseteq U_\Omega$ ist wohlgeordnet und läßt sich kanonisch auf einen gewissen Anfangsabschnitt von U_Ω abbilden. Dieser Abschnitt kann jedoch die Menge $U_{|W|}$ als echten Teil umfassen. Wir könnten also die Willkür bei der Auswahl von e_W nur vermeiden durch Angabe einer kanonischen Abbildung einer beliebigen wohlgeordneten Menge der Mächtigkeit $|W|$ auf ihren Anfangsabschnitt $U_{|W|}$ vom Ordnungstyp $a(|W|)$.

[7] Um die angesprochene Willkür ganz zu vermeiden, könnte man Krasners Theorie von Ordnungszahlen ausgehend aufbauen. Für jede Ordnungszahl ω wäre die Menge U_ω der Ordnungszahlen $\nu < \omega$ als natürlich gegebene Referenzmenge einzuführen. Jede Untermenge $W \subseteq U_\omega$ wäre dann ebenfalls wohlgeordnet, und es gäbe eine kanonische ordnungstreue Abbildung von W auf den entsprechenden Anfangsabschnitt U_ν von U_ω. Jedoch würde sich dann bei den Relationen, die man auf der Grundlage der verschiedenen Ordnungstypen definieren könnte, eine gewisse redundante Wiederholung einstellen.

Betrachten wir eine Menge A wie in Kapitel I. Es wird hier und im folgenden stets vorausgesetzt, daß $|A| < \Omega_0$. Jede Abbildung $P : U_\Omega \to A$ definiert einen Punkt der Dimension Ω mit Komponenten in A[8]. Die Menge aller Punkte der Dimension Ω wird durch A^Ω bezeichnet und heißt die cartesische Potenz von A der Ordung Ω.

Eine Relation der Dimension (oder Stellenzahl) Ω über A wird definiert durch eine Aussageform ρ, die sich auf Punkte der Dimension Ω bezieht. Wie in Kapitel I gebrauchen wir die Schreibweise

$\vdash \ \rho(P)$ um auszudrücken, daß die Aussage $\rho(P)$ wahr ist, und
$\dashv \ \rho(P)$ im entgegengesetzten Fall.

Für eine Relation ρ bezeichne $G(\rho)$ die Menge aller $P \in A^\Omega$, für welche $\vdash \ \rho(P)$. Diese Menge heißt Graph der Relation ρ.

Relationen mit demselben Graphen werden nicht unterschieden, wenn sie auch dieselbe Dimension haben. Jedoch sehen wir die leeren Relationen unterschiedlicher Dimensionen als verschieden an. Dies bedeutet also, daß Aussageformen, die sich auf Punkte derselben Dimension beziehen, zur selben Relation führen, wenn sie äquivalent sind.

3. Operationen auf Relationen

Komplement

Für eine beliebige Relation ρ der Dimension Ω bezeichne $\rho^\sim$ die Relation mit der Eigenschaft

$$\vdash \ \rho^\sim(P) \text{ dann und nur dann, wenn } \dashv \ \rho(P).$$

Die Relation $\rho^\sim$ wird auch Komplement von ρ genannt. Für die Graphen der Relationen ρ und $\rho^\sim$ gelten die Formeln $G(\rho) \cup G(\rho^\sim) = A^\Omega$ und $G(\rho) \cap G(\rho^\sim) = \emptyset$.

Durchschnitt und Vereinigung von Relationen

Sei R eine Menge von Relationen über A von derselben Dimension. Dann bezeichnet $[R]$ die Relation mit $G([R]) = \cap_{(\rho \in R)} G(\rho)$ und (R) die Relation mit $G((R)) = \cup_{(\rho \in R)} G(\rho)$. Es gilt $(R) = [R^\sim]^\sim$.

[8] Die Terminologie "point" stammt von Krasner. Sie ist nicht als eine Beschränkung der Theorie auf in irgendeinem Sinn geometrische Strukturen zu verstehen. Würden nur Punkte endlicher Dimension betrachtet, so wäre es angemessener von Tupeln zu reden.

Transformierte bezüglich einer Permutation λ

Sei λ eine Permutation der Menge U_Ω. Für den Punkt $P: u \to Pu$ der Dimension Ω bezeichne $P\lambda$ den Punkt mit $P\lambda: u \to P(\lambda(u))$.

Für eine beliebige Relation ρ der Dimension Ω bezeichnet dann $\rho\lambda$ die Relation, für welche $\vdash\ \rho\lambda(P\lambda)$ für alle und nur die Punkte P, für die $\vdash\ \rho(P)$.

Die Relation $\rho\lambda$ heißt Transformierte von ρ bezüglich λ. Für den Graphen von $\rho\lambda$ folgt die Formel $G(\rho\lambda) = G(\rho)\lambda$.

Projektion

Sei W eine Untermenge von U_Ω. Für einen beliebigen Punkt P der Dimension Ω sei P_W der Punkt der Dimension $|W|$ mit $P_W: e_W w \to Pw$ $(w \in W)$.

Für eine beliebige Relation der Dimension Ω bezeichnet dann ρ_W die Relation der Dimension $|W|$, für welche

$\vdash\ \rho_W(Q)$ dann und nur dann, wenn es einen Punkt P gibt, so daß
$\vdash\ \rho(P)$ und $Q = P_W$.

Die Relation ρ_W heißt Projektion von ρ auf die Untermenge W. Für den Graphen von ρ_W gilt $G(\rho_W) = (G(\rho))_W$.

Erweiterung

Sei W eine Untermenge von U_Ω und Q ein Punkt der Dimension $|W|$. Es bezeichne $Q^{(W)}$ die Menge der Punkte P der Dimension Ω mit der Eigenschaft $P_W = Q$.

Für eine beliebige Relation ρ der Dimension $|W|$ bezeichnet dann $\rho^{(W)}$ die Relation der Dimension Ω, für welche

$\vdash\ \rho^{(W)}(P)$ dann und nur dann, wenn $\vdash\ \rho(P_W)$.

Die Relation $\rho^{(W)}$ heißt Erweiterung von ρ bezüglich $W \subseteq U_\Omega$. Für den Graphen von $\rho^{(W)}$ gilt $G(\rho^{(W)}) = (G(\rho))^{(W)}$.

Quasi-Diagonale bezüglich einer Permutation λ

Sei λ eine Permutation von U_Ω. Es bezeichne λ^* die Relation, für die

$\vdash\ \lambda^*(P)$ dann und nur dann, wenn $P\lambda = P$.

Diese Relation heißt Quasi-Diagonale bezüglich λ.

I_Ω und O_Ω bezeichnen die Relationen mit den Graphen $G(I_\Omega) = A^\Omega$ und $G(O_\Omega) = \emptyset$. Die Relation I_Ω ist die Quasi-Diagonale bezüglich der identischen Permutation und es gelten die Beziehungen $O_\Omega = I_\Omega^\sim$, $I_\Omega = O_\Omega^\sim$.

Die oben definierten Operationen $\rho \to \rho^{\sim}$, $R \to [R]$, $\rho \to \rho\lambda$, $\rho \to \rho_W$ und $\rho \to \rho^{(W)}$ heißen (logische) Grundoperationen.[9]

Eine bezüglich der Grundoperationen abgeschlossene Menge von Relationen über A, die alle Quasi-Diagonalen enthält, heißt (logisch) $\boldsymbol{\Omega}_0$-abgeschlossen. (Krasner gebraucht dafür den Ausdruck „logiquement fermé, au dessous $\boldsymbol{\Omega}_0$“. Ein in der neueren Literatur üblicher Name dafür ist Krasnersche Algebra erster Art.)

Bemerkungen

1) Sei R eine Menge von Relationen. Es gibt dann stets $\boldsymbol{\Omega}_0$-abgeschlossene Mengen, die R enthalten. Zum Beispiel die Menge aller Relationen über A für alle Dimensionen $\boldsymbol{\Omega} < \boldsymbol{\Omega}_0$.
2) Sind R_1 und R_2 logisch $\boldsymbol{\Omega}_0$-abgeschlossene Mengen von Relationen, so ist auch ihre Schnittmenge $R_1 \cap R_2$ logisch $\boldsymbol{\Omega}_0$-abgeschlossen. Dasselbe gilt von Schnittmengen beliebig vieler logisch $\boldsymbol{\Omega}_0$-abgeschlossener Mengen von Relationen. Für eine beliebige Menge R von Relationen ist daher die Schnittmenge über alle logisch $\boldsymbol{\Omega}_0$-abgeschlossenen Relationenmengen $Q \supseteq R$ selbst logish $\boldsymbol{\Omega}_0$-abgeschlossen. Wir bezeichnen diese Menge durch $\langle R, \boldsymbol{\Omega}_0 \rangle$ und nennen sie den (logischen) $\boldsymbol{\Omega}_0$-Abschluß von R (oder die von R erzeugte Krasnersche Algebra). Wenn eine Relation σ zum $\boldsymbol{\Omega}_0$-Abschluß von R gehört, so werden wir auch sagen, sie sei aus der Relationenmenge R logisch $\boldsymbol{\Omega}_0$-ableitbar (oder schlicht ableitbar, wenn es nicht notwendig ist, an die Relationenmenge R oder an die obere Grenze $\boldsymbol{\Omega}_0$ zu erinnern).

4. Eigenschaften der Krasnerschen Relationenalgebren

Es sollen zuerst einige Eigenschaften des $\boldsymbol{\Omega}_0$-Abschlusses der leeren Menge untersucht werden, die wir später benötigen.

Sei $P : u \to Pu$ ein beliebiger Punkt. P heißt umkehrbar (oder injektiv), wenn für $u \neq v$ stets $Pu \neq Pv$ gilt. P heißt erschöpfend (surjektiv), wenn es zu jedem $a \in A$ ein $u \in U_{\Omega}$ gibt, so daß $Pu = a$. Ein injektiver und surjektiver Punkt P muß notwendigerweise die Dimension $|A|$ haben; einen solchen Punkt nennen wir bijektiv.

Satz 1.a) Für jede Dimension $\boldsymbol{\Omega} \leq |A|$ ist die Relation i_{Ω}, die für alle injektiven Punkte und nur für diese erfüllt ist, aus der leeren Menge $\boldsymbol{\Omega}_0$-ableitbar.

[9] Im endlichen Fall kann man sich vergewissern, daß die Ergebnisse der genannten Operationen stets ableitbare Relationen im Sinne von Kapitel I, §4 sind. Man vergleiche dazu die instruktive Tabelle in [17] (s. Tabelle 3, Seite 67).

b) Für die Dimension $|A|$ ist die Relation b_A, die für alle bijektiven Punkte und nur für diese erfüllt ist, aus der leeren Menge $\mathbf{\Omega}_0$-ableitbar.

Beweis: a) Wir bezeichnen mit $\lambda_{u,v}$ die Permutation von U_Ω, welche die Elemente $u \neq v$ vertauscht und alle übrigen invariant läßt. Es folgt

$\vdash \lambda^*_{u,v}(P)$ dann und nur dann, wenn $Pu = Pv$.

Ist daher P^* die Menge $\{\lambda^*_{u,v}: u,v \in U$ und $u \neq v\}$, so folgt $i_\Omega = [P^{*\sim}]$ und daher $i_\Omega \in \langle P^*, \mathbf{\Omega}_0 \rangle = \langle \emptyset, \mathbf{\Omega}_0 \rangle$.

b). Sei Q ein injektiver Punkt der Dimension $|A|$, der nicht bijektiv ist. Dann gibt es eine Untermenge $W \subset U_{|A|}$ und einen bijektiven Punkt P, so daß $Q = P_W$.

Zum Beweis betrachten wir die Untermenge $X = QU_{|A|}$ und irgendeinen bijektiven Punkt P_1. Sei W die Untermenge aller $w \in U_{|A|}$ mit $P_1 w \in X$. Dann folgt $e_W(W) = U_{|A|}$, weil nämlich $|W| = |X| = |A|$, und ferner $P_{1W} U_{|A|} = X$. Wir suchen eine Permutation λ von $U_{|A|}$, so daß $P_1 \lambda_W = Q$. Damit dies erfüllt ist, muß für alle $w \in W$ gelten $Q(e_W(w)) = P_1 \lambda_W(e_W(w)) = P_1 \lambda(w)$ oder $\lambda(w) = P_1^{-1} Q(e_W(w))$. Nun ist $w \to P_1^{-1} Q(e_W(w))$ eine Permutation der Menge W und läßt sich daher zu einer Permutation λ von $U_{|A|}$ fortsetzen. Also existiert λ mit der gewünschten Eigenschaft und $P = P_1 \lambda$ ist der gesuchte Punkt.

Sei nun X die Menge aller Relationen $\{i_{|A|W}: W \subset U_{|A|}$ und $|W| = |A|\}$. Sei τ die Relation (X). Dann ist τ genau für die injektiven aber nicht bijektiven Punkte erfüllt, die wir gerade alle aus der Relation $i_{|A|}$ wegnehmen wollen. Es folgt somit $b_A = [i_{|A|}, \tau^\sim]$.

Sei ρ eine Relation der Dimension $\mathbf{\Omega}$. Wir betrachten eine Äquivalenzelation Γ über der Menge $\mathbf{\Omega}$ mit der Eigenschaft, daß aus $\Gamma(u, v)$ für alle Punkte P, für welche $\vdash \rho(P)$, die Gleichung $Pu = Pv$ folgt. Es sollen also alle die Relation ρ erfüllenden Punkte P auf jeder Klasse bezüglich Γ konstant sein.

Wie erhält man Relationen mit einer derartigen Eigenschaft, wenn umgekehrt Γ gegeben ist? Man wählt eine Untergruppe $L \subseteq \mathrm{Sym}\ (U_\Omega)$, deren Bahnen gerade die Klassen bezüglich Γ sind. Dann hat die Relation $\sigma = [L^*]$ die erwünschte Eigenschaft. Sie besteht nämlich gerade für die Punkte, die auf allen Bahnen von L konstant sind.

Satz 2. Unter den obigen Voraussetzungen sei V ein Vertretersystem der Klassen bezüglich Γ. Dann gilt $\rho = [\rho_V^{(V)}, [L^*]]$.

Beweis: Sei wie oben $\sigma = [L^*]$ und $\tau = [\rho_V^{(V)}, \sigma]$. Sei P ein Punkt, welcher ρ erfüllt: $\vdash \rho(P)$. Dann folgt $\vdash \rho_V(P_V)$ und somit auch $\vdash \rho_V^{(V)}(P)$. Ferner gilt nach Voraussetzung $\vdash \sigma(P)$, denn P sollte ja auf allen Klassen bezüglich Γ konstant sein. Daraus folgt $\vdash \tau(P)$.

Sei umgekehrt P ein Punkt mit $\vdash \tau(P)$. Es folgt $\vdash \sigma(P)$ und somit ist P auf allen Bahnen von L, d.h. auf allen Klassen bezüglich Γ konstant. Ferner folgt $\vdash \rho_V(P_V)$. Daher gibt es einen Punkt Q mit $\vdash \rho(Q)$ und $P_V = Q_V$. Für ein beliebiges $v \in V$ ergibt sich $Qv = Q_V(e_V v) = P_V(e_V v) = Pv$, d.h. Q und P stimmen auf dem Vertretersystem V überein. Da nun sowohl Q als P auf den Klassen bezüglich Γ konstant sind, folgt $P = Q$, d.h. $\vdash \rho(P)$.

Sei f eine Abbildung von U_{Ω_2} in U_{Ω_1}. Ist P ein Punkt der Dimension $\mathbf{\Omega}_1$, so bezeichne Pf den Punkt der Dimension $\mathbf{\Omega}_2$ mit $Pf(u) = P(f(u))$ für alle $u \in U_{\Omega_2}$. Mit andern Worten ist Pf die Funktionskomposition der beiden Funktionen $f\colon U_{\Omega_2} \to U_{\Omega_1}$ und $P\colon U_{\Omega_1} \to A$.

Ist ρ eine Relation der Dimension $\mathbf{\Omega}_1$, so sei ρf die Relation der Dimension $\mathbf{\Omega}_2$ mit der Eigenschaft

$\vdash \rho f(P_1)$ für alle und nur die Punkte P_1 der Form $P_1 = Pf$, für die $\vdash \rho(P)$.

Ist umgekehrt σ eine Relation der Dimension $\mathbf{\Omega}_2$, so sei σ/f die Relation der Dimension $\mathbf{\Omega}_1$, für welche

$\vdash \sigma/f(P)$ für alle und nur die Punkte, für die $\vdash \sigma(Pf)$.

Es gilt $(\sigma/f)f = [\sigma, I_{\Omega_1} f]$. Denn für einen beliebigen Punkt der Dimension $\mathbf{\Omega}_1$ ergibt sich $\vdash \sigma(Pf)$ genau dann, wenn $\vdash \sigma/f(P)$, und letzteres genau dann, wenn $\vdash (\sigma/f)f(Pf)$.

$$\begin{tikzcd} \mathbf{U}_{\Omega_1} \arrow[r, "\mathbf{P}"] & \mathbf{A} \\ \mathbf{U}_{\Omega_2} \arrow[u, "\mathbf{f}"] \arrow[ur, dotted, "\mathbf{Pf}"'] & \end{tikzcd}$$

Satz 3. a) Die Relation ρf ist aus ρ ableitbar.
b) Die Relation σ/f ist aus σ ableitbar.

Beweis: a) Durch die Funktion f ist in U_{Ω_2} eine Äquivalenzrelation Γ gegeben: $\Gamma(u, v) \leftrightarrow f(u) = f(v)$. Sei V ein Vertretersystem für die Klassen bezüglich Γ. Ferner sei W die Untermenge $W = \{f(u) : u \in U_{\Omega_2}\}$ von U_{Ω_1}. Die Funktion f bildet dann V auf W bijektiv ab und es gibt eine eindeutig bestimmte Permutation λ von $U_{|V|} = U_{|W|}$, so daß das folgende Diagramm kommutativ wird:

$$\begin{tikzcd} \mathbf{W} \arrow[r, "\mathbf{e}_{\mathbf{W}}"] & \mathbf{U}_{|\mathbf{W}|} \arrow[d, "\lambda"] \\ \mathbf{V} \arrow[u, "\mathbf{f}"] \arrow[r, "\mathbf{e}_{\mathbf{V}}"'] & \mathbf{U}_{|\mathbf{V}|} \end{tikzcd}$$

Es ist nämlich $\lambda(e_W(f(v)) = e_V(v)$ für $v \in V$,
d.h. $\lambda(u) = e_V f^{-1} e_W{}^{-1}(u)$ für $u \in U_{|W|}$,
d.h. $\lambda = e_V f^{-1} e_W{}^{-1}$.

Für einen beliebigen Punkt P der Dimension $\mathbf{\Omega}_1$ folgt somit

$P_W \lambda^{-1} : \lambda e_W f(v) = e_V(v) \to P_W e_W f(v) = P(f(v))$ und $Pf_V : e_V(v) \to P(f(v))$.

Daher $P_W \lambda^{-1} = Pf_V$. Es folgt nun $\rho_W \lambda^{-1(V)} = (\rho f)^{(V)}_V$. Nach Satz 2 können wir eine Untergruppe $L \subseteq \mathrm{Sym}\ (U_{\Omega_2})$ wählen, deren Bahnen gerade die Klassen bezüglich der Relation $f(u) = f(v)$ sind, und es gilt $\rho f = [(\rho f)^{(V)}_V, [L^*]]$. Damit haben wir bewiesen, daß $\rho f = [\rho_W \lambda^{-1(V)}, [L^*]]$. Somit ist ρf aus ρ ableitbar.
b) Wir können σ durch $\tau = [\sigma, I_{\Omega_1} f]$ ersetzen, denn τ ist gerade für die Punkte der Form Pf erfüllt, für die $\vdash \sigma(Pf)$. Es gilt also $\tau/f = \sigma/f$. Da τ aus σ ableitbar ist, genügt es also zu zeigen, daß τ/f aus τ ableitbar ist.

Die Werte, die ein Punkt P außerhalb der Untermenge W annimmt, beeinflussen nicht den Punkt Pf. Wenn nämlich $Pw = Qw$ für alle $w \in W$ oder, was dasselbe ist, wenn $P_W = Q_W$, so folgt $Pf = Qf$. Daraus folgt $(\tau/f)^{(W)}_W = (\tau/f)$.

Beim Beweis von a) haben wir gesehen, daß $(Pf)_V = P_W \lambda^{-1}$ für alle Punkte P der Dimension $\mathbf{\Omega}_1$. Also gilt auch $(Pf)_V \lambda = P_W$.

Wir behaupten $\tau_V \lambda = (\tau/f)_W$. Dies sieht man am besten durch Vergleich der Graphen der beiden Relationen: Der Graph von $\tau_V \lambda$ besteht aus allen Punkten der Form $(Pf)_V \lambda$, wobei $\vdash \tau(Pf)$. Der Graph von $(\tau/f)_W$ besteht aus allen Punkten der Form P_W, wobei ebenfalls $\vdash \tau(Pf)$. Also stimmen beide Graphen überein. Somit haben wir bewiesen, daß $\sigma/f = \tau/f = (\tau/f)^{(W)}_W = (\tau_V \lambda)^{(W)}$.

5. Invariante Relationen

Betrachten wir nun Permutationen von A und ihre Wirkung auf Punkte und auf Relationen. Ist P ein Punkt der Dimension $\mathbf{\Omega}$ und g eine Permutation der Menge A, so bezeichne gP den Punkt mit $gP(u) = g(Pu)$ für alle $u \in U_\Omega$. D.h. der Punkt gP hat die u-Komponente $g(Pu)$, wenn P die u-Komponente Pu hat.

Ist ρ eine Relation der Dimension $\mathbf{\Omega}$, so bezeichne $g(\rho)$ die Relation mit $\vdash g(\rho)(P)$ für alle und nur die P, für welche ein Q existiert mit $\vdash g(Q)$ und $P = gQ$. Für den Graphen der Relation $g(\rho)$ gilt somit $G(g(\rho)) = gG(\rho)$.

Eine Relation ρ heißt invariant unter g, wenn $g(\rho) = \rho$.

Sei $g \in \mathrm{Sym}\,(A)$, $\lambda \in \mathrm{Sym}\,(U_\Omega)$, ρ eine Relation der Dimension $\boldsymbol{\Omega}$, R eine Menge von Relationen der Dimension $\boldsymbol{\Omega}$, W eine Untermenge von U_Ω und σ eine Relation der Dimension $|W|$. Dann gelten die folgenden Aussagen:

(5.1) g läßt jede Quasi-Diagonale invariant.
(5.2) Ist ρ invariant unter g, so ist es auch $\rho^{\sim}$.
(5.3) Ist ρ invariant unter g, so ist es auch $\rho\lambda$.
(5.4) Ist jede Relation $\rho \in R$ invariant unter g, so ist es auch $[R]$.
(5.5) Ist ρ invariant unter g, so ist es auch ρ_W.
(5.6) Ist σ invariant unter g, so ist es auch $\sigma^{(W)}$.

Aus den Aussagen (5.1)–(5.6) folgt

Satz 4. Läßt $g \in \mathrm{Sym}\,(A)$ jede Relation ρ aus einer Relationenmenge R invariant, so läßt g auch jede Relation ρ im logischen $\boldsymbol{\Omega}_0$-Abschluß $\langle R, \boldsymbol{\Omega}_0\rangle$ der Menge R invariant.

Sei nun G eine Gruppe von Permutationen der Menge A, d.h. eine Untergruppe von Sym (A). Man überzeugt sich leicht, daß $(g, P) \to gP$ bzw. $(g, \rho) \to g(\rho)$ die Eigenschaften einer Wirkung haben. D.h. die Gruppe G wirkt vermöge der Operationen $(g, P) \to gP$ bzw. $(g, \rho) \to g(\rho)$ sowohl auf der Menge der Punkte der Dimension $\boldsymbol{\Omega}$ als auf der Menge der Relationen der Dimension $\boldsymbol{\Omega}$.

Ist G eine Untergruppe von Sym (A) so bezeichnen wir die Menge der Relationen, die von allen $g \in G$ invariant gelassen werden, durch inv $\boldsymbol{\Omega}_0$ (G) (oder einfach durch inv (G), wenn es nicht notwendig ist, die obere Schranke $\boldsymbol{\Omega}_0$ anzudeuten).

Die folgenden Aussagen sind nicht schwer zu beweisen:

(5.7) Sei $\sigma \in \mathrm{inv}\,(G)$. Dann ist der Graph von σ eine Vereinigung von Bahnen. Betrachten wir einen Punkt P, für welchen
$\vdash \sigma(P)$. Dann gilt offenbar auch $\vdash \sigma(gP)$ für alle $g \in G$.

Somit erfüllen alle Punkte der Bahn GP die Relation σ.

(5.8) Sind P und P_1 bijektive Punkte, so gibt es genau eine Permutation g der Menge A mit $P_1 = gP$.

Es ist nämlich $g = P_1 P^{-1}$.

(5.9) Sei P ein bijektiver Punkt und $G \subseteq \mathrm{Sym}\,(A)$. Dann wirkt G auf der Bahn GP regulär. Dies folgt aus (5.8).

(5.10) Seien $G, H \subseteq \mathrm{Sym}\,(A)$ und sei $\mathrm{inv}\,(G) = \mathrm{inv}\,(H)$. Dann folgt $G = H$.

Zum Beweis betrachten wir einen bijektiven Punkt P und seine Bahn unter G. Die entsprechende Relation β_P bleibt invariant unter G, also auch unter H. Würde nun β_P noch feinere unter H invariante Relationen enthalten, so wären diese auch unter G invariant. Da dies nicht möglich ist, entspricht β_P auch einer Bahn von H. Sei nun P_1 ein beliebiger Punkt der Bahn $GP = HP$. Dann gibt es genau ein $g \in \mathrm{Sym}\,(A)$ mit $P_1 = gP$. Da es auch jeweils eindeutig bestimmte Permutationen in G und in H mit dieser Eigenschaft gibt, müssen diese mit g übereinstimmen. Es folgt $G = H$.

6. Allgemeine Strukturen und der Hauptsatz von Krasner

Eine Menge A ist für sich selbst genommen amorph, strukturlos. A erhält Struktur, wenn Relationen über A gegeben sind. Die Menge A zusammen mit einer Menge R von über A definierten Relationen bildet daher eine Struktur S und wir bezeichnen diesen Sachverhalt durch $S = (A; R)$ oder auch durch $S = (A; R, \Omega_0)$, wenn an die obere Schranke für die Dimension der explizit vorgegebenen oder im logischen Abschluß enthaltenen Relationen erinnert werden soll.

Unter Aut (S) verstehen wir die Menge aller Permutationen von A, die alle Relationen $\rho \in R$ invariant lassen. Aut (S) ist, wie man sich leicht überzeugt, eine Gruppe (Aussage b von §1).

Satz 5. (Existenzprinzip von Krasner) Zu jeder Untergruppe $G \subseteq \mathrm{Sym}\,(A)$ gibt es eine Struktur $S = (A; R)$, so daß $G = \mathrm{Aut}\,(S)$.

Beweis: Sei P ein Punkt und GP seine Bahn. Die der Bahn von P entsprechende Relation β_P bleibt invariant unter allen Permutationen $h \in G$, da $h\,(gP) = (hg)\,P$ und da mit g auch hg alle Elemente von G durchläuft.

Sei also R die Menge aller Relationen, die irgendeiner Bahn von G entsprechen, und $S = (A; R)$. Dann folgt $G \subseteq \mathrm{Aut}\,(S)$.

Ist nun $f \in \mathrm{Aut}\,(S)$, so müssen wir beweisen, daß $f \in G$. Dazu betrachten wir einen bijektiven Punkt P.

Die der Bahn GP entsprechende Relation β_P bleibt invariant unter f, daraus folgt $f\,P = gP$ für ein passendes g in G. Da P ein bijektiver Punkt ist, folgt nun $f = g$.

Satz 6. (Hauptsatz von Krasner) Sei S die Struktur $S = (A; R)$ und $G = \mathrm{Aut}(S)$. Dann gilt inv $(G) = \langle R, \Omega_0 \rangle$.

Mit andern Worten wird behauptet: eine Relation ρ ist genau dann invariant unter allen Abbildungen $g \in G$, wenn sie in Ω_0-Abschluß der Relationenmenge R liegt, d.h. wenn sie ableitbar ist.[10]

[10] Die Relationen des logischen Ω_0-Abschlusses $\langle R, \Omega_0 \rangle$ entsprechen also den aus R ableitbaren Relationen aus Kapitel I; dies gilt in einem genaueren Sinne dann, wenn für eine endliche Struktur $S = (A; R, \Omega_0)$ die Kardinalzahl Ω_0 gleich der Mächtigkeit $\aleph_0$ der Menge der natürlichen Zahlen gesetzt ist.

Beweis: Aus Satz 5 von §5 folgt sofort $\langle R, \Omega_0\rangle \subseteq \mathrm{inv}\,(G)$. Wir müssen also nur noch die umgekehrte Beziehung beweisen. Der Beweis ist ganz ähnlich wie der entsprechende Beweis in Kapitel I und gliedert sich auch in analoge Beweisschritte.

(6.1) Ableitbarkeit ist eine transitive Beziehung. Ist jede Relation $\sigma \in S$ aus einer Relationenmenge R ableitbar und ist τ aus S ableitbar, so ist die Relation τ auch aus R ableitbar.

Es folgt nämlich $S \subseteq \langle R, \Omega_0\rangle$ und somit $\langle S, \Omega_0\rangle \subseteq \langle R, \Omega_0\rangle$. Weiter gilt nach Voraussetzung $\tau \in \langle S, \Omega_0\rangle$. Daraus ergibt sich $\tau \in \langle R, \Omega_0\rangle$.

(6.2) Jede Relation $\sigma \in \mathrm{inv}\,(G)$ ist aus Bahnrelationen ableitbar.

Dies folgt aus der Aussage (5.7) des vorigen Paragraphen.

(6.3) Zu jedem Punkt P der Dimension Ω gibt es eine eindeutig bestimmte Relation $\sigma \in \langle R, \Omega_0\rangle$ mit den Eigenschaften

(i) $\vdash \sigma(P)$ und
(ii) wenn $\tau \in \langle R, \Omega_0\rangle$ eine Relation ist, die (i) erfüllt, so gilt $\vdash \tau(Q)$ für alle Punkte der Dimension Ω, für die $\vdash \sigma(Q)$.

Die triviale Relation I_Ω erfüllt (i). Sei nun T die Menge der ableitbaren Relationen, die (i) erfüllen. Sei $\sigma = [T]$. Wegen (6.1) ist σ aus R ableitbar und σ erfüllt (i) und (ii). Ist nun σ_1 eine beliebige aus R ableitbare Relation, die (i) und (ii) erfüllt, so sieht man leicht, daß $G(\sigma) = G(\sigma_1)$ und somit $\sigma = \sigma_1$.

Sei nun P ein bijektiver Punkt der Dimension $|A|$ und sei σ die zugehörige ableitbare Relation mit den Eigenschaften (i) und (ii).

Aus Satz 2.b von §4 und aus der Minimalitätseigenschaft (ii) von σ folgt, daß σ nur für bijektive Punkte erfüllt sein kann. Sei nun P_1 ein beliebiger Punkt mit $\vdash \sigma(P_1)$.

Da P und P_1 bijektive Punkte sind, gibt es eine eindeutig bestimmte Permutation $g \in \mathrm{Sym}\,(A)$, so daß $g(Pu) = P_1 u$ für alle $u \in U_{|A|}$. Übrigens ist dann $P_1 = gP$. Wir behaupten

(6.4) $g \in \mathrm{Aut}\,(S)$.

Angenommen g ließe eine der Relationen aus R, etwa ρ, nicht invariant und sei $\Omega = \dim\,(\rho)$. Dann gäbe es einen Punkt Q der Dimension Ω, so daß

$\vdash \rho(Q)$ aber
$\vdash \rho^{\sim}(gQ)$ oder $\vdash \rho^{\sim}(g^{-1}Q)$.

Betrachten wir zuerst den ersten Fall $\vdash \rho^{\sim}(gQ)$. Da P ein bijektiver Punkt ist, gibt es eine eindeutig bestimmte Funktion $f: U_\Omega \to U_{|A|}$, so daß $Qu = Pf(u)$ für alle $u \in U_\Omega$, (nämlich $f = P^{-1}Q$). Sei τ die Relation der Dimension $|A|$ mit

$\vdash \tau(L)$ für alle und nur die Punkte L, für welche
$\vdash \sigma(L)$ und $\vdash \rho(Lf)$.

Die Relation τ ist gleich $[\sigma, \rho/f]$, folglich nach Satz 4.b aus σ und ρ ableitbar, folglich nach (6.1) aus R ableitbar. Für diese Relation τ ergibt sich nun

$\vdash \tau(P)$, da $Pf = Q$ und da $\vdash \rho(Q)$, aber $\vdash \tau^{\sim}(P_1)$,
da $P_1 = gP$ und da $(gP)f = g(Pf) = gQ$ und $\vdash \rho^{\sim}(gQ)$.

Dies steht im Widerspruch zu den Eigenschaften der Relation σ.

Im zweiten Fall, wenn $\vdash \rho^{\sim}(g^{-1}Q)$ ersetzen wir Q durch $Q_1 = g^{-1}Q$ und haben

$\vdash \rho(gQ_1)$ aber $\vdash \rho^{\sim}(Q_1)$. Daraus folgt
$\vdash \rho^{\sim}(Q_1)$ aber $\vdash \rho^{\sim\sim}(gQ_1)$.

Nun arbeiten wir mit $\rho^{\sim}$ an Stelle von ρ und erhalten den gleichen Widerspruch wie vorher.

(6.5) Umgekehrt besteht $G = \mathrm{Aut}\,(S)$ auch nur aus Abbildungen wie den in (6.4) betrachteten. Dies folgt aus der Invarianz der Relation σ unter G. Ist nämlich $g \in G$, so folgt $\vdash \sigma(gP)$. Setzen wir $P_1 = gP$, so erhalten wir die Abbildung g aus dem Punkt P_1 wie unter (4).

Wegen (6.1) und (6.2) genügt es nun zu beweisen, daß für jede Dimension $\mathbf{\Omega} < \mathbf{\Omega}_0$ jede einer Bahn entsprechende Relation aus σ ableitbar ist. Dazu betrachten wir einen Punkt Q der Dimension $\mathbf{\Omega}$. Wie oben beweist man die Existenz einer Funktion $f: U_{\Omega} \to U_{|A|}$, so daß $Q = Pf$.

Die zur Bahn gehörige Relation β_Q ist nach (6.4) und (6.5) genau für die Punkte der Form $P_1 f$ erfüllt, für welche $\vdash \sigma(P_1)$.

Denn aus (6.4) und (6.5) folgt, daß $P_1 = gP$ für ein passendes $g \in G$. Somit $P_1 f = (gP)f = g(Pf) = gQ$. D.h. es gilt $\beta_Q = \sigma f$.

Aus Satz 4.a, §4 folgt nun, daß $\beta_Q = \sigma f$ aus der Relation σ ableitbar ist. Damit ist der Satz bewiesen.

7. Folgerungen aus dem Hauptsatz von Krasner

Strukturen $S_1 = (A; R_1)$ und $S_2 = (A; R_2)$ nennen wir $\mathbf{\Omega}_0$-äquivalent, wenn $\langle R_1, \mathbf{\Omega}_0 \rangle = \langle R_2, \mathbf{\Omega}_0 \rangle$. Mit anderen Worten: $\mathbf{\Omega}_0$-äquivalente Strukturen haben den gleichen $\mathbf{\Omega}_0$-Abschluß.

Korollar 1. (Äquivalenzprinzip von Krasner) Die Strukturen $S_1 = (A; R_1, \mathbf{\Omega}_0)$ und $S_2 = (A; R_2, \mathbf{\Omega}_0)$ sind genau dann $\mathbf{\Omega}_0$-äquivalent, wenn $\mathrm{Aut}\,(S_1) = \mathrm{Aut}\,(S_2)$.

Beweis: Sei $G = \mathrm{Aut}\,(S_1)$ und $H = \mathrm{Aut}\ (S_2)$. Nach Satz 7 folgt dann $\mathrm{inv}\ (G) = \langle R_1, \mathbf{\Omega}_0\rangle$ und $\mathrm{inv}\ (H) = \langle R_2, \mathbf{\Omega}_0\rangle$. Ist also $G = H$, so folgt $\langle R_1, \mathbf{\Omega}_0\rangle = \langle R_2, \mathbf{\Omega}_0\rangle$ und somit sind die Strukturen S_1 und S_2 äquivalent.

Nehmen wir nun umgekehrt an, S_1 und S_2 seien äquivalent, d.h. $\langle R_1, \mathbf{\Omega}_0\rangle = \langle R_2, \mathbf{\Omega}_0\rangle$. Es folgt $\mathrm{inv}\ (G) = \mathrm{inv}\ (H)$ und $G = H$ wegen Lemma 1.

Korollar 2. Die Bedingung der $\mathbf{\Omega}_0$-Äquivalenz ist unabhängig von der Kardinalzahl $\mathbf{\Omega}_0$. Korollar 2 berechtigt uns also den Ausdruck $\mathbf{\Omega}_0$-äquivalent einfach durch *äquivalent*[11] zu ersetzen.

Korollar 3. Sei $S_1 = (A; R)$ eine beliebige Struktur. Dann gibt es eine Relation ρ, die nur für bijektive Punkte erfüllt ist, so daß die Strukturen S_1 und $S_2 = (A; \rho)$ äquivalent sind.

Ähnlich wie wir bereits im Falle endlicher Strukturen gesehen haben, gibt der Hauptsatz von Krasner auch die Antwort auf die Frage, welche Punkte durch einen Automorphismus der Struktur ineinander übergeführt werden können.

Wir wollen zwei Punkte P_1 und P_2 der gleichen Dimension $\mathbf{\Omega}$ durch die Relationenmenge X unterscheidbar nennen, wenn es in der Menge X eine Relation ρ der Dimension $\mathbf{\Omega}$ gibt, so daß

$\vdash \rho(P_1)$ aber $\dashv \rho(P_2)$ oder $\vdash \rho(P_2)$ aber $\dashv \rho(P_1)$.

Korollar 4. (Beweglichkeitsprinzip). Zwei Punkte P_1 und P_2 der Dimension $\mathbf{\Omega}$ lassen sich genau dann durch einen Automorphismus der Struktur $S = (A; R)$ ineinander überführen, wenn sie nicht durch ableitbare Relationen unterscheidbar sind.

Beweis: Ableitbar heißt hier entsprechend den Konventionen von §3 eine Relation ρ genau dann, wenn $\rho \in \langle R, \mathbf{\Omega}_0\rangle$. Sei $g \in \mathrm{Aut}\ (S)$ und $g(P_1) = P_2$. Wir müssen zeigen, daß sich die beiden Punkte nicht durch Relationen aus der Menge $\langle R, \mathbf{\Omega}_0\rangle$ unterscheiden lassen.

---

[11] Die Äquivalenz von Strukturen liefert eine Klassifikation, die für manche Fragestellungen adäquat, für andere dagegen viel zu grob ist.

Nennen wir eine Struktur starr, wenn ihre Automorphismengruppe nur aus der identischen Abbildung besteht. Nach dem Satz von Krasner sind dann alle Relationen ableitbar und alle starren Strukturen über derselben Grundmenge A sind untereinander äquivalent.

Nun ist es zum Beispiel einfach, zu einer beliebigen endlichen Menge A starre endliche Strukturen zu konstruieren. Aber die Frage, ob es endliche starre projektive Ebenen gibt, ist ein schwieriges und bisher ungelöstes Problem der Forschung. (Im unendlichen Fall ist die Existenz starrer projektiver Ebenen bekannt).

Sei nun ρ eine aus R ableitbare Relation der Dimension Ω mit der Eigenschaft

$\vdash \rho(P_1)$. Wegen der Invarianz von ρ unter g folgt
$\vdash \rho(P_2)$.

Nehmen wir nun umgekehrt an, daß sich die beiden Punkte P_1 und P_2 nicht durch die Relationenmenge $\langle R, \Omega_0 \rangle$ unterscheiden lassen.

Sei β_P die der Bahn von P_1 entsprechende Relation. Dann gilt $\beta_p \in \langle R, \Omega_0 \rangle$. Nach Voraussetzung gilt
$\vdash \beta_P(P_1)$ und da sich die beiden Punkte nicht durch aus R ableitbare Relationen unterscheiden lassen, folgt
$\vdash \beta_P(P_2)$.

Somit gibt es ein $g \in G$, so daß $g(P_1) = P_2$.

Literatur[12]

[3] Paul Bernays and Abraham A. Fraenkel, Axiomatic Set Theory, North-Holland, Amsterdam 1958.

[4] V. G. Bodnarčuk, L. A. Kalužnin, V. N. Kotov und B. A. Romov, Galois-Theorie für Postsche Algebren (Russisch: Teoria Galua dlja algebr Posta, I, II). Kibernetika 3, 1–10 (1969), Sowie Kibernetika 5, 1–9 (1969).

[5] Nicolas Bourbaki, Théorie des ensembles, Chapitre IV, Structures, Masson, Paris 1990.

[7] I. A. Faradžev, A. A. Ivanov, M. H. Klin, A. J. Woldar (Herausgeber), Investigations in Algebraic Theory of Combinatiorial Objects. Kluwer, Dordrecht, 1994.

[8] A. J. Franco de Oliveira, On Automorphisms of Arbitrary Mathematical Systems, History and Philosophy of Logic, 6. (Translation of [21] with some additional remarks by the translator).

[10] Lew A. Kalužnin, M. H. Klin, Über gewisse maximale Untergruppen der symmetrischen und alternierenden Gruppen (Russisch: O nekotorych maksimal'nych podgruppach simmetričeskich i znakoperemennych grupp.) Matem. Sbornik 87 (129) 91–121 (1972).

[11] Otto H. Kegel, Adalbert Kerber, Michail H. Klin, Reinhard Pöschel (Hrsg.), Algebra and Combinatorics : Interactions and Applications. (A conference dedicated to the memory of Lev Arkadevich Kalužnin on the occasion of his 80th birthday. Königstein, March 6–12, 1994). Proceedings of the Conference.

[12] Michail H. Klin, R. Pöschel, K. Rosenbaum, Angewandte Algebra. 1988, VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften.

[13] S. Kochen, Ultraproducts in the Theory of Models, Annals of Math. 74, No. 2 (1961).

[14] Marc Krasner, Une généralisation de la notion de corps. J. Math. pure et appl. (Liouville Journal) 17 367–385 (1938).

[15] Hanfried Lenz, Grundlagen der Elementarmathematik. VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin 1967.

[12] Das Literaturverzeichnis wird im zweiten Teil vervollständigt.

[16] B. I. Plotkin, Groups of automorphisms of algebraic systems (translated by K. A. Hirsch). Groningen, Wolters-Noordhoff Publishing 1972.
[17] Reinhard Pöschel, Lew A. Kalužnin, Funktionen und Relationenalgebren. 1979, VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften (oder Birkhäuser Basel).
[18] B. A. Romov, über die Formeldarstellung von Prädikaten auf endlichen Modellen. (Russich: O formul'nosti predikatov na konječnych modeljach.) Kibernetika 1, 41–42, (1972).
[21] José Sebastião e Silva, Sugli automorfismi di un sistema matematico qualunque. Obras de José Sebastião e Silva. Vol. I., p. 105–134, Instituto Nacional de Investigação Cientifica, Lissabon 1985.
[22] —, Para uma teoria geral dos homomorfismos. Obras de José Sebastião e Silva. Vol. I., p. 135–335, Instituto Nacional de Investigação Cientifica, Lissabon 1985.
[26] Alexander I. Wittenberg, Vom Denken in Begriffen. Birkhäuser Verlag, Basel und Stuttgart, 1957.

Anschrift des Verfassers: Dr. A. Schleiermacher, Schlüsselbergstr. 16, D-81673 München, Bundesrepublik Deutschland.