Sitzungsber. Abt. II (1996) 205: 175–182

Operatormethoden für *q*-Identitäten V: *q*-Catalan-Bäume

Von

J. Cigler

(Vorgelegt in der Sitzung der math.-nat. Klasse am 14. November 1996
durch das w. M. Johann Cigler)

Sei $r \geqslant 2$ ganz. Für jedes $x = 1, 2, 3 \ldots$ konstruieren wir einen Wurzelbaum G_x^r, dessen Kanten mit $0, 1, 2, \ldots$ bezeichnet sind, folgendermaßen: Die Wurzel habe den Grad x und die von ihr ausgehenden Kanten seien mit $0, 1, \ldots, x-1$ bezeichnet. Der Endknoten jeder Kante mit der Bezeichnung i habe den Grad $r+i$ und die von ihm ausgehenden Kanten die Bezeichnungen $0, 1, \ldots r+i-1$. Ist $x=1$, so nennen wir $C^r := G_1^r$ einen Catalanbaum. Für $r=2$ wurden Catalanbäume von J. West [2] untersucht. Er hat u.a. gezeigt, daß die Anzahl der Knoten auf der Höhe n oder –was auf dasselbe hinauskommt–die Anzahl der verschiedenen Wege $\alpha_1 \alpha_2 \ldots \alpha_n$ von der Wurzel zur Höhe n gegeben ist durch die Catalanzahl

$$C_n^r = \frac{1}{(r-1)n+1}\binom{rn}{n} = \frac{1}{rn+1}\binom{rn+1}{n}.$$

Wir wollen im Folgenden ein q-Analogon dieser Situation studieren. Als q-Analogon der Catalanzahlen C_n^r wählen wir dabei die q-Polynome $C_n^r(q) := G_n([1], r)$, die in [1] betrachtet wurden. Bezüglich Terminologie und Literaturhinweisen sei auf [1] verwiesen.

Wir nennen C^r einen q-Catalanbaum, wenn jede Kante α das Gewicht q^α und jeder Weg $\alpha_1 \ldots \alpha_n$ das Gewicht $q^{\alpha_1 + \ldots + \alpha_n}$ besitzt.

Analog nennen wir G_x^r einen q-Gould-Baum, wenn der Weg $\alpha_1 \ldots \alpha_n$ das Gewicht $q^{\alpha_1 + \ldots + \alpha_n}$ besitzt.

Satz 1. *Das Gesamtgewicht aller Wege $\alpha_1 \dots \alpha_n$ von der Wurzel zur Höhe n im q-Gould-Baum G_x^r ist*

$$\sum_{\alpha_1 \dots \alpha_n} q^{\alpha_1 + \dots + \alpha_n} = G_n([x], r). \tag{1}$$

Speziell ergibt sich im Fall $x = 1$, daß das Gesamtgewicht aller solchen Wege im q-Catalanbaum C^r durch $C_n^r(q)$ gegeben ist.

Beweis. α_1 ist die Kante, die von der Wurzel ausgeht. Es ist also $\alpha_1 < x$. Ist α_i eine Kante von der Höhe i–1 in die Höhe i und α_{i+1} eine Kante, die vom Endpunkt von α_i weggeht, so ist nach Definition von G_x^r

$$0 \leqslant \alpha_{i+1} < \alpha_i + r.$$

Die Wege von der Wurzel der Länge n sind also gegeben durch $\alpha_1 \dots \alpha_n$ mit $0 \leqslant \alpha_1 < x$ und $0 \leqslant \alpha_{i+1} < \alpha_i + r$ für $i = 1, 2, \dots, n-1$.

Wie im nachfolgenden Lemma gezeigt wird, ist

$$\sum q^{\alpha_1 + \dots + \alpha_n} = G_n([x], r),$$

und damit ist Satz 1 bewiesen.

Lemma. *Sei $r \geqslant 0$ ganz und $W_{x,n}$ die Menge aller n-tupel $\alpha_1 \dots \alpha_n$ mit $0 \leqslant \alpha_1 < x, 0 \leqslant \alpha_{i+1} < \alpha_i + r$ für $1 \leqslant i \leqslant n-1$.*

Dann ist

$$\sum_{\alpha_1 \dots \alpha_n \in W_{x,n}} q^{\alpha_1 + \cdots + \alpha_n} = G_n([x], r). \tag{2}$$

Beweis. Sei $g_n(x) = \sum_{\alpha_1 \dots \alpha_n \in W_{x,n}} q^{\alpha_1 + \cdots + \alpha_n}$.

Dann ist $g_n(x+1) = \sum_{\alpha_1 < x} q^{\alpha_1 + \cdots + \alpha_n} + \sum_{\alpha_1 = x} q^{\alpha_1 + \cdots + \alpha_n} =$
$g_n(x) + q^x g_{n-1}(x+r)$, weil $\alpha_2 < x + r$ ist.

Es ist also $\frac{g_n(x+1) - g_n(x)}{q^x} = g_{n-1}(x+r)$ und außerdem $g_n(0) = \delta_{n0}$.

Durch diese beiden Eigenschaften ist aber $G_n([x], r)$ eindeutig festgelegt (vgl. [1]).

Für $r = 2$ ergeben sich für die Gewichte der Wege der Länge $n = 1, 2, 3$:

$$\begin{aligned}
C_1^2(q) &= w(0) = 1 \\
C_2^2(q) &= w(00) + w(01) = 1 + q \\
C_3^2(q) &= w(000) + w(001) + w(010) + w(011) + w(012) \\
&= 1 + q + q + q^2 + q^3 = 1 + 2q + q^2 + q^3.
\end{aligned}$$

Nun wollen wir die q-Gould-Bäume G_x^r etwas genauer studieren. Wir nennen einen Weg $\alpha_1 \dots \alpha_n$, wo also $0 \leqslant \alpha_1 < x$ und $0 \leqslant \alpha_{i+1} \leqslant \alpha_i + r - 1$, $1 \leqslant i \leqslant n-1$, gilt, einen k-Weg ($k = 0, 1, \dots n$), wenn $\alpha_{i+1} \geqslant (r-1)\,i$ für $0 \leqslant i < k$ und $\alpha_{k+1} < (r-1)\,k$ gilt.

Ein k-Weg hat dann die Gestalt $\alpha_1 \dots \alpha_n$ mit

$$\alpha_{i+1} = (r-1)\,i + \beta_{i+1}, \quad i < k$$

wobei wegen $\alpha_{i+1} \leqslant \alpha_i + (r-1)$ gilt

$$(r-1)\,i + \beta_{i+1} \leqslant (r-1)\,(i-1) + \beta_i + (r-1),$$

d.h. $\beta_{i+1} \leqslant \beta_i$.

Das Gewicht aller k-Wege in G_x^r von der Wurzel bis zur Höhe n ist also

$$\begin{aligned} \sum_{\alpha_1 \dots \alpha_n} q^{\alpha_1 + \cdots + \alpha_n} &= q^{(r-1)\binom{k}{2}} \cdot \sum_{\beta_1 \geqslant \beta_2 \geqslant \cdots \geqslant \beta_k} q^{\beta_1 + \cdots + \beta_k} \cdot \sum q^{\alpha_{k+1} + \cdots + \alpha_n} \\ &= q^{(r-1)\binom{k}{2}} \cdot G_{n-k}([(r-1)\,k], r) \cdot \begin{bmatrix} x+k-1 \\ k \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Denn $\alpha_{k+1} \dots \alpha_n$ liegt in $G^x_{(r-1)k}$ und $\beta_1 \dots \beta_k$ erfüllt $\beta_1 < x$ und $\beta_{i+1} < \beta_i + 1$.
Aus dem Lemma für $r = 1$ folgt also $\Sigma q^{\beta_1 + \cdots + \beta_k} = G_k([x], 1) = \begin{bmatrix} x+k-1 \\ k \end{bmatrix}$ nach [1].

Da jeder Weg $\alpha_1 \dots \alpha_n \in G_x^r$ ein k-Weg für ein eindeutig bestimmtes k ist, folgt also

Satz 2. *Für $r \geqslant 2$ und $x \geqslant 0$ gilt*

$$G_n([x], r) = \sum_{k=0}^{n} A_{nk}^{(r)} \begin{bmatrix} x+k-1 \\ k \end{bmatrix} \tag{3}$$

mit $A_{nk}^r = q^{(r-1)\binom{k}{2}} G_{n-k}([(r-1)\,k], r)$.

Bemerkung. Man hätte dieses Resultat auch rein rechnerisch erhalten können. Wir wollen gleich ein allgemeineres Resultat ableiten. Da die q-Polynome $\begin{bmatrix} x+k-1 \\ k \end{bmatrix}$, $k \geqslant 0$, eine Basis für die Polynome über $\mathbb{R}(q)$ bilden, gibt es eine Darstellung

$$G_n([x+i], r] = \sum_k C_{nk}(i) \begin{bmatrix} x+k-1 \\ k \end{bmatrix}$$

für jedes $i \in \mathbb{Z}$.

Dabei ist

$$C_{nk}(i) = L(E^{-1}\Delta)^k G_n([x+i], r) = q^{(r-1)\binom{k}{2}+ik} G_{n-k}([i+(r-1)k], r),$$

wie man leicht nachrechnet.

Somit ergibt sich für $i \in \mathbb{Z}$ die Formel

$$G_n([x+i], r) = \sum_{k \geqslant 0} q^{(r-1)(\binom{k}{2})+ik} G_{n-k}([i+(r-1)k], r) \begin{bmatrix} x+k-1 \\ k \end{bmatrix}. \quad (4)$$

Umgekehrt gibt es auch eine Darstellung

$$\begin{bmatrix} x+n-1 \\ n \end{bmatrix} = \sum_k D_{nk}(i) G_k([x+i], r).$$

Hier findet man ganz analog

$$D_{nk}(i) = L(E^{-r}\Delta)^k E^{-i} \begin{bmatrix} x+n-1 \\ n \end{bmatrix} = q^{-(r-1)\binom{k}{2}-ik} \begin{bmatrix} n-kr-i-1 \\ n-k \end{bmatrix},$$

d.h.

$$\begin{bmatrix} x+n-1 \\ n \end{bmatrix} = \sum_{k \geqslant 0} q^{-(r-1)\binom{k}{2}-ik} \begin{bmatrix} n-kr-i-1 \\ n-k \end{bmatrix} G_k([x+i], r). \quad (5)$$

Aus (3) folgt noch einmal für $x=1$, daß das Gesamtgewicht aller Wege der Länge n in C^r gegeben ist durch

$$\sum_k A_{nk}^{(r)} = G_n([1], r) = C_n^r(q).$$

Wir wollen nun eine Rekursionsformel für die $A_{nk}^{(r)}$ ableiten.

Satz 3. *Die Folge $A_{nk}^{(r)}$ ist durch $A_{n0}^{(r)} = \delta_{n0}$ und die Rekursionsformel*

$$A_{nk}^{(r)} = q^{(r-1)(k-1)} \sum_{l \geqslant 0} A_{n-1,k-1+l} \begin{bmatrix} r+l-2 \\ l \end{bmatrix} \quad (6)$$

für $k \geqslant 1$ eindeutig festgelegt.

Beweis. Aus der charakteristischen Eigenschaft

$$(E^{-r}\Delta) G_n([x], r) = G_{n-1}([x], r)$$

und

$$G_n([x], r) = \sum A_{nk} \begin{bmatrix} x+k-1 \\ k \end{bmatrix} \text{ folgt}$$

$$(E^{-1}\Delta) \sum A_{nk} \begin{bmatrix} x+k-1 \\ k \end{bmatrix} = E^{r-1} \sum A_{n-1,j} \begin{bmatrix} x+j-1 \\ j \end{bmatrix},$$

$$\text{d.h.} \quad \sum_k A_{nk} \begin{bmatrix} x+k-2 \\ k-1 \end{bmatrix} = \sum_j A_{n-1,j} \begin{bmatrix} x+r+j-2 \\ j \end{bmatrix}.$$

Setzt man

$$\begin{bmatrix} x+r+j-2 \\ j \end{bmatrix} = \sum C_k \begin{bmatrix} x+k-2 \\ k-1 \end{bmatrix},$$

so ergibt sich sofort

$$C_k = L(E^{-1}\Delta)^{k-1} \begin{bmatrix} x+r+j-2 \\ j \end{bmatrix} = q^{(r-1)(k-1)} \begin{bmatrix} r+j-k-1 \\ j-k+1 \end{bmatrix}.$$

Daher ist

$$\sum_k A_{nk} \begin{bmatrix} x+k-2 \\ k-1 \end{bmatrix} = \sum_j A_{n-1,j} \sum_k \begin{bmatrix} x+k-2 \\ k-1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} r+j-k-1 \\ j-k+1 \end{bmatrix} q^{(r-1)(k-1)}$$

und schließlich für $k \geqslant 1$

$$A_{nk} = q^{(r-1)(k-1)} \sum_{l \geqslant 0} A_{n-1,k-1+l} \begin{bmatrix} r+l-2 \\ l \end{bmatrix}.$$

Die Matrix $A = (A_{nk}^{(r)})$ sieht also folgendermaßen aus:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & [r-1] & q^{r-1} & 0 & \dots \\ 0 & [r-1]^2 + q^{r-1}\begin{bmatrix} r \\ 2 \end{bmatrix} & q^{r-1}([r-1] + q^{r-1}[r-1]) & q^{3(r-1)} & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{pmatrix}$$

Die Zeilensummen ergeben jeweils $C_n^r(q)$.
So ist etwa

$$C_0^r(q) = C_1^r(q) = 1$$
$$C_2^r(q) = [r-1] + q^{r-1} = [r],$$
$$C_3^r(q) = \frac{[r]}{[2]}([2r] + q[r-1]).$$

Für $r=2$ reduziert sich (6) auf

$$A_{nk}^{(2)} = q^{k-1} \sum_{l \geqslant 0} A_{n-1,k-1+l}^{(2)}.$$

Speziell ist $A_{nl}^{(2)} = \Sigma A_{n-1,k-1+l}^{(2)} = C_{n-1}^{(2)}(q)$ für $n \geqslant 1$ und $A_{n2}^{(2)} = qC_{n-1}^{(2)}(q)$ für $n \geqslant 2$.

Die Formel

$$G_n([x+y],r)=\sum_k q^{kx}G_k([y],r]G_{n-k}([x],r) \tag{7}$$

(vgl. [1], (5)) läßt sich ebenfalls leicht aus dem Baum G^r_{x+y} ablesen:

Für jeden Weg $\alpha_1\ldots\alpha_n\in G^r_{x+y}$ gibt es ein eindeutig bestimmtes k, $0\leqslant k\leqslant n$, mit

$$\alpha_i\geqslant x \quad \text{für} \quad i=1,2,\ldots,k \quad \text{und} \quad \alpha_{k+1}<x.$$

Das Gesamtgewicht dieser Wege ist

$$q^{kx}G_k([y],r)\,G_{n-k}([x],r).$$

Denn $\alpha_1\ldots\alpha_n$ hat dann die Gestalt $x+\beta_1,\ldots,x+\beta_k,\gamma_{k+1}\ldots\gamma_n$ mit $0\leqslant\beta_1<y, 0\leqslant\beta_{i+1}\leqslant\beta_i+r-1$ und $\gamma_{k+1}<x, \gamma_{j+1}\leqslant\gamma_j+r-1$.

Aus (7) und $G_n([1],r)=G_n([1]\,r)-G_n([0],r)=G_{n-1}([r],r)$ für $n\geqslant 1$ ergibt sich

$$C^r_{n+1}(q)=G_n([r],r)=\sum_{k_1} q^{k_1(r-1)}\,C^r_{k_1}(q)\,G_{n-k_1}([r-1],r)$$

$$=\sum_{k_1+\cdots+k_r=n} q^{k_1(r-1)+\cdots+k_{r-1}}C^r_{k_1}(q)\ldots C^r_{k_r}(q),$$

d.h.

$$C^r_{n+1}(q)=\sum_{k_1+\cdots+k_r=n} q^{k_1(r-1)+k_2(r-2)+\cdots+k_{r-1}}C^r_{k_1}(q)\ldots C^r_{k_r}(q). \tag{8}$$

Beispielsweise ist

$$C^r_3(q)=[r]\frac{q^{2r}-1}{q^2-1}+q\begin{bmatrix} r\\ 2\end{bmatrix}.$$

Abschließend wollen wir noch eine weitere Formel für $C^r_n(q)$ angeben, die sich aus (5) für $x=0$ ergibt, wenn man $i=1$ setzt.

Beachtet man, daß

$$\begin{bmatrix} n-kr-2\\ n-k\end{bmatrix}=(-1)^{n-k}q^{(n-k)(n-kr-2)-\binom{n-k}{2}}\begin{bmatrix} 1+k(r-1)\\ n-k\end{bmatrix}$$

gilt, so ergibt sich nach leichter Rechnung für $n\geqslant 1$

$$C^r_n(q)=\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k-1}C^r_{n-k}(q)\,q^{r\binom{k}{2}}\begin{bmatrix} 1+(r-1)(n-k)\\ k\end{bmatrix}. \tag{9}$$

Z.B. ist $C^r_2(q) = \begin{bmatrix} r \\ 1 \end{bmatrix} = [r]$ oder

$$C^r_3(q) = \begin{bmatrix} 1+2(r-1) \\ 1 \end{bmatrix} C^r_2(q) - \begin{bmatrix} 1+r-1 \\ 2 \end{bmatrix} q^r C^r_1(q)$$
$$= [2r-1][r] - \begin{bmatrix} r \\ 2 \end{bmatrix} q^r.$$

Die Gleichung

$$\sum_{k=0}^{n} (-1)^k C^r_{n-k}(q)\, q^{r\binom{k}{2}} \begin{bmatrix} 1+(r-1)(n-k) \\ k \end{bmatrix} = 0 \tag{10}$$

für $n \geqslant 1$ kann auch rein kombinatorisch bewiesen werden:

Zu diesem Zweck betrachten wir die Menge $D_{n,k}$ aller $\gamma_1 \ldots \gamma_n$ mit $\gamma_i = \alpha_i$ für $i \leqslant n-k$ und $\gamma_{n-k+j} = \beta_j + (j-1)(r-1)$, $1 \leqslant j \leqslant k$, wobei $\alpha_1 \ldots \alpha_{n-k} \in C^r$ und $\beta_1 < \beta_2 < \ldots < \beta_n \leqslant (n-k)(r-1)$ ist.

Dann ist das Gesamtgewicht $w(D_{n,k})$ der Menge $D_{n,k}$ gegeben durch

$$w(D_{n,k}) = \left(\sum q^{\alpha_1 + \cdots + \alpha_{n-k}}\right) \cdot q^{\binom{k}{2}(r-1)} \cdot \sum q^{\beta_1 + \cdots + \beta_k}$$
$$= C^r_{n-k}(q) \cdot q^{\binom{k}{2}(r-1)} \cdot q^{\binom{k}{2}} \begin{bmatrix} 1+(r-1)(n-k) \\ k \end{bmatrix}.$$

Denn nach dem Lemma für $r = 0$ ist

$$\sum_{0 \leqq \beta_1 < \beta_2 < \cdots < \beta_k \leqslant x} q^{\beta_1 + \cdots + \beta_k} = \begin{bmatrix} x+1 \\ k \end{bmatrix} q^{\binom{k}{2}}.$$

Man sieht nun leicht, daß jedes $\gamma_1 \ldots \gamma_n \in \bigcup_{k=0}^{n} D_{n,k}$ in genau 2 Mengen $D_{n,i}$ und $D_{n,j}$ liegt. Dabei ist überdies $j = i+1$.

Denn sei $\gamma_1 \ldots \gamma_n = \alpha_1 \ldots \alpha_{n-k} \beta_1, \beta_2 + r - 1, \ldots \beta_n + (k-1)(r-1)$.

Dann ist entweder $\beta_1 \leqslant \alpha_{n-k} + (r-1)$–in diesem Fall kann $\beta_1 = \alpha_{n-k+1}$ gesetzt werden–oder $\beta_1 > \alpha_{n-k} + (r-1)$. Dann kann α_{n-k} zu den β's genommen werden.

Weitere Möglichkeiten gibt es nicht, da

$$\gamma_{n-k+2} = \beta_2 + r - 1 > \beta_1 + r - 1 = \gamma_{n-k+1} + r - 1$$

ist und daher $\gamma_1 \ldots \gamma_{n-k+2} \notin C^r$ ist.

Somit heben sich in der alternierenden Summe

$$w(D_{n,0}) - w(D_{n,1}) + w(D_{n,2}) - + \ldots$$

alle Terme weg. Sie ist daher $= 0$ und somit ist Gleichung (10) erfüllt.

Literatur

[1] Cigler, J.: Operatormethoden für q-Identitäten IV: Eine Klasse von q-Gould-Polynomen. ÖAW Sitzungsber. **205**, 169–174 (1996).
[2] West, J.: Generating trees and the Catalan and Schröder numbers. Discr. Math. **146**, 247–262 (1995).

Anschrift des Verfassers: Prof. Dr. Johann Cigler, Institut für Mathematik, Strudlhofgasse 4, A-1090 Wien.