Sitzungsber. Abt. II (1997) 206: 15–42

Sitzungsberichte
Mathematisch-naturwissenschaftliche Klasse Abt. II
Mathematische, Physikalische und Technische Wissenschaften

Über die quadratische Abweichung ganzzahliger Polynome von der Null

Von

K. Prachar

(Vorgelegt in der Sitzung der math.-nat. Klasse am 23. Jänner 1997
durch das w. M. Edmund Hlawka)
*Dissertation zur Erlangung des Doktorgrades
an der philosophischen Fakultät
der Universität Wien, 1947*

1. Einleitung

D. Hilbert[1] hat gezeigt: Es gibt stets ganzzahlige Polynome

$$P_n(x) = a_0 + a_1 X + \cdots + a_n x^n$$

so daß

$$\int_a^b p_n^2 dx$$

gegen Null strebt, wenn n gegen Unendlich geht und $(b-a)<4$ ist. Wir geben dafür einen anderen Beweis und füllen eine Lücke in der Hilbertschen Arbeit aus. Es wird gezeigt, daß die Behauptung $(b-a)<4$ die schärfstmöglichste ist, d.h. für $(b-a) \geqslant 4$ ist der Satz falsch. Es wird nun die Fragestellung verschärft. Wir verlangen, daß ein Teil der Koeffizienten von vorneherein Null ist. Wir zeigen zunächst: Es gibt zu jeder natürlichen Zahl l eine Folge von Polynomen $p_n(x)$, wo $n = k.l$ und $a_0 = a_1 = \cdots = a_{(k-1)l} = 0$, so daß

$$\int_a^b p_n^2(x) dx \leqq M_k$$

[1] D. Hilbert, Ges. Abh. II., S. 367–370.

wo

$$M_k = \left[l_k \frac{(n+1)^{(m+1)^2}}{(m+2)^{\frac{(m+2)^2}{2}} m^{\frac{m^2}{2}}} \right]^k$$

$m = 2l - 2$ und $\lim l_k = 1$ ist.

Weiter wird gezeigt (Satz 3): Ist $k_1, k_2, \ldots$ eine monoton wachsende Folge natürlicher Zahlen, so gibt es stets eine Folge von Polynomen

$$q_n(x) = a_0 + a_1 x^{k_1} + \cdots + a_{n-1} x^{k_{n-1}}$$

a_i ganz, so daß $\int_0^a q_n^2 dx$ beliebig klein wird, wenn nur

$$f_n = (n+1) \left[\frac{\prod_{i=0}^{n-1} (k_n - k_i)}{\prod_{i=0}^{n-1} (1 + k_i + k_n)} \right]^2 a^{2k_n}$$

eine Nullfolge ist. (Das gilt auch, wenn die k_i beliebig reell sind.) Insbesondere folgt daraus: Ist p eine natürliche Zahl und $a < \sqrt[p]{4}$, so gibt es eine Folge ganzzahliger Polynome

$$s_n(x) = a_0 + a_1 x^p + \cdots + a_n x^{pn}.$$

so daß

$$\int_0^a s_n^2 dx \to 0 \text{ strebt.}$$

Wir verallgemeinern dann die Fragestellung dahin, daß wir statt des Intervalls (a, b) eine beliebige Kurve der komplexen Zahlenebene betrachten. (Wir bezeichnen sie mit C). Von den Koeffizienten des Polynoms verlangen wir nicht mehr daß sie ganze rationale Zahlen, sind, sondern sie, mögen als ganze Zahlen des imaginär-quadratischen Zahlkörpers $K(i\sqrt{m})$ ($m > 0$, quadratfrei, ganz rational) gewählt werden können. Darunter verstehen wir Zahlen von der Form

$$x + iy\sqrt{m} \quad m \not\equiv 1 \pmod 4$$
$$x + y\frac{1 + i\sqrt{m}}{2} \quad m \equiv -1 \pmod 4$$

Wir bilden dann das Integral

$$\int_C |p_n(z)|^2 ds$$

wo s das Bogenelement der Kurve C bedeutet. (C soll etwa als stückweise glatt angenommen werden). Wir übertragen einige Sätze auf diesen Fall.

Dabei spielt der von Fekete eingeführte transfinite Durchmesser der Kurve C eine Rolle. Dieser ist folgendermaßen definiert:

$$c = \lim_{n\to\infty} \max \sqrt[\binom{n}{2}]{\prod_{1\leqq i<k\leqq n} |z_i - z_k|}, \quad z_j \in C$$

Wir zeigen (Satz 4): Ist $c < 1$, so können die betrachteten Integrale beliebig klein gemacht werden. (Dieses Resultat findet sich in anderer Form schon bei Szegö,[2] wo der transfinite Durchmesser nicht verwendet wird.)

Satz 13 zeigt, daß man die Koeffizienten der zugelassenen Polynome aus einer Folge von imaginär quadratischen Zahlkörpern nehmen kann, daß also die „Dichte“ der zugelassenen Zahlen beliebig klein werden kann.

Weiter beweisen wir in Satz 14 (der Einfachheit halber beschränken wir uns hier auf den Fall $m = 1$) daß es nicht nur eine Folge von Polynomen gibt, welche die Integrale beliebig klein macht, sondern grob gesprochen unendlich viele solcher Polynome. Genauer beweisen wir:

Sei C eine Kurve mit dem transfiniten Durchmesser $c < 1$. Dann gibt es zu jeder monoton gegen ∞ wachsenden Folge ganzer Zahlen l_n für die

$$l_n = o\left(\frac{1}{(\sqrt{c})^n}\right)$$

ist, jedenfalls l_n Polynome p_n, so daß $\int_C |p_n^2| ds$ mit wachsendem n beliebig klein wird, gleichgültig welches der p_n man zur Bildung der Integrale verwendet.

Wir ändern nun die Fragestellung dahin ab, daß wir statt der $p_n(x)$ homogene Polynome zweier Variabler mit ganzzahligen Koeffizienten

$$h_n(x,y) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} y + \cdots + a_n y^n$$

Suchen, für welche die Integrale

$$\int_c h_n^2(x, y) ds, \quad C : x = x(s), y = y(s)$$

mit wachsendem n beliebig klein werden. Wir beweisen für diese Integrale zu den Vorhergehenden analoge Sätze. Wir erwähnen z.B. folgendes: Sei C die Stecke AB. Wenn der Flächeninhalt des Dreiecks OAB (O Koordinatenursprung) kleiner als 2 ist, so können die betrachteten Integrale mit wachsendem n beliebig klein gemacht werden.

Zur Behandlung des allgemeinen Falles führen wir eine neue geometrische Konstante ein, die wir den transfiniten Flächeninhalt nennen. Sie

[2] Szegö, Math. Ann. 87 (1922), S. 104.

spielt hier eine ähnliche Rolle, wie vorher der transfinite Durchmesser. Wir leiten mit ihrer Hilfe analoge Sätze für die Integrale $\int_c h_n^2 \, ds$ her, wir vorher für die Integrale $\int_c |p_n^2| \, ds$.

Es gilt folgender *Cauchysche Determinantensatz:* Die Determinante n-ten Grades

$$D = \left| \begin{array}{cccc} \frac{1}{x_1+y_n}, & \frac{1}{x_1+y_2} & \cdots & \frac{1}{x_1+y_n} \\ \frac{1}{x_2+y_1}, & \frac{1}{x_2+y_2} & \cdots & \frac{1}{x_2+y_n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{1}{x_n+y_1}, & \frac{1}{x_n+y_2} & \cdots & \frac{1}{x_n+y_n} \end{array} \right]$$

wobei die x_i und y_k beliebige komplexe Zahlen bedeuten, hat den Wert

$$D = \frac{\prod_{1 \leqq i \leqq k \leqq n} (x_k - x_i)(y_k - y_i)}{\prod_{i,k=1}^{n} (x_i + y_k)}$$

Beweis:[3] Subtrahiert man die letzte Zeile von allen vorhergehenden, so steht in der i-ten Zeile und k-ten Spalte das Element

$$\frac{1}{x_i + y_k} - \frac{1}{x_n + y_k} = \frac{(x_n - x_i)}{(x_i + y_k)(x_n + y_k)}; \qquad \begin{array}{l} i = 1 \ldots n-1 \\ k = 1 \ldots n \end{array}$$

Man kann also aus der i-ten Zeile den Faktor $(x_n - x_i)$ und aus k-ten Spalte dem Faktor

$$\frac{1}{x_n + y_k} \qquad \begin{array}{l} i = 1 \ldots n-1 \\ k = 1 \ldots n \end{array}$$

herausheben. Zieht man nun die letzte Spalte von allen vorhergehenden ab, so kann man wieder aus der i-ten Zeile

$$\frac{1}{x_i + y_n} \qquad i = 1 \ldots n-1$$

und aus der kten Spalte $(y_n - y_k)$ herausheben. $(k = 1 \ldots n-1)$ Es verbleibt in der linken oberen Ecke ein $(n-1)$-zeiliger Minor, der dieselbe Struktur hat wie D, während in der letzten Zeile lauter Nullen stehen, ausgenommen die letzte Spalte wo eine 1 steht. Durch Rekursion folgt die Behauptung

[3] Polya-Szegö, Aufgaben und Lehrsätze aus der Analysis II., S. 98.

2.

Wir betrachten in diesem Abschnitt die ganzzahligen Polynome

$$p_n(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_0 \tag{1}$$

nur in dem Intervall (0, 1). Man kann dann jedenfalls solche $p_n(x)$ auswählen, daß die Integrale

$$\int_0^1 p_n^2(x)dx \tag{2}$$

mit wachsendem n beliebig klein werden. Zu diesem Zweck braucht man ja nur z.B. $p_n(x) = x^n$ setzen und erhalt

$$\int_0^1 p_n^2(x)dx = \int_0^1 x^{2n}dx = \frac{1}{2n+1}$$

was mit $n \to \infty$ beliebig klein wird.

Es steht jedoch zu erwarten, daß die Integrale (2) sich schneller der Null nähern können, wenn man in $p_n(x)$ mehrere a_i als von Null verschieden zuläßt (und nicht nur a_n wie in obigem Beispiel). Hierüber zeigen wir folgenden

Satz 1: Man kann Polynome (1) mit $a_0 = a_1 = \cdots = a_{n-k} = 0$ so wählen, daß

$$\int_0^1 p_n^2(x)dx = o\left(\frac{1}{n^k}\right)$$

wird. (k fest, positiv ganz)
Beweis: Es wird in diesem Falle

$$\int_0^1 p_n^2(x)dx = \int_0^1 \left(\sum_{i=0}^{k-1} a_{n-1} x^{n-1}\right)^2 dx$$

$$= \sum_{L=0}^{k-1} a_{n-1} a_{n-m} \int_0^1 x^{2n-1-m} dx$$

$$= \sum_{l\,L=0}^{k-1} a_{n-1} a_{n-m} \frac{1}{2n-1-m+1}.$$

Dies ist eine quadratische Form in den a_i, deren Diskriminante folgendermaßen aussieht:

$$D_k = \begin{vmatrix} \frac{1}{(n-k+1)+(n-k+1)+1}, & \frac{1}{(n-k+1)+(n-k+2)+1}, & \cdots & \frac{1}{(n-k+1)+n+1} \\ \frac{1}{(n-k+2)+(n-k+1)+1}, & \frac{1}{(n-k+2)+(n-k+2)+1}, & \cdots & \frac{1}{(n-k+2)+n+1} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots & & & \\ \frac{1}{n+(n-k+1)+1}, & \frac{1}{n+(n-k+2)+1}, & \cdots & \frac{1}{n+n+1} \end{vmatrix}$$

Nach dem Determinantensatz aus 1. wird dann

$$D_k = \frac{(1^{k-1}2^{k-2}\dots(k-1))^2}{\begin{array}{l}(2(n-k)+3)(2(n-k)+4)^2\dots \\ \qquad\dots(2(n-k)+k+2)^k\dots(2n)^2(2n+1)\end{array}} \tag{3}$$

Bei festem k gilt also

$$D_k = 0\left(\frac{1}{n^{k^2}}\right).$$

Nun benützen wir den folgenden *Satz von Minkowski*:[4]

Eine positiv definite quadratische Form in n Variablen mit der Diskriminante D kann durch ganzzahlige Wahl der Variabeln kleiner gemacht werden als

$$n\sqrt[n]{D}.$$

Nach diesem Satz können die Integrale kleiner gemacht werden als

$$k\sqrt[k]{D_k} = 0\left(\frac{1}{n^k}\right),$$

womit die Behauptung bewesen ist.

3.

Wir wollen nun untersuchen, wie sich die obige Schranke verbessert, wenn wir die Anzahl k der als nichtverschwindend zugelassenen k_i mit n wachsen lassen. Wir setzen zu diesem Zweck $n = k.l$, (wobei l eine feste positive ganze Zahl bedeuten soll) und betrachten die Polynome $p_{kl}(x)$, in denen $a_0 = a_1 = \cdots = a_{(k-1)l} = 0$ ist. In diesen Polynomen ist also sozusagen nur der l-te Teil der Koeffizienten als von Null verschieden wählbar. Hier gilt der

[4] Crelle, J. Math. 107.

Satz 2: Setzt man $2l-2=m$, so ist es möglich, die a_i als ganze Zahlen so zu wählen, daß

$$\int_0^1 p_{kl}^2(x)dx \leqq M_k$$

wobei

$$M_k = \left[l_k \frac{(m+1)^{(m+1)^2}}{(m+2)^{\frac{(m+2)^2}{2}} m^{\frac{m^2}{2}}} \right]^k$$

mit $l_k \to 1$ für $k \to \infty$.

Beweis: Es entsteht bei der Berechnung der Integrale wieder eine quadratische Form, deren Variablenzahl jetzt aber nicht mehr fest ist, sondern wächst. Ihre Diskriminante kann nach (3) in der Form geschrieben werden

$$\begin{aligned} D_k &= \frac{(1!2!3!\ldots\ldots(k-1)!)^2}{(mk+3)(mk+4)^2\cdots(mk+k+2)^k(mk+k+3)^{k-1}\cdots(mk+2k+1)} \\ &= \frac{(1!2!\ldots(k-1)!)^2((km+3)^{k-1}(km+4)^{k-2}\cdots(km+k+1))^2}{(km+3)^{2k-1}\cdots(km+k+2)^k\cdots(km+2k+1)} \\ &= \frac{(1!2!\ldots(k-1)!)^2(1!2!\ldots(km+k+1)!)^2(km+2)!}{(1!2!\ldots(km+2)!)(1!2!\cdots(km+2k+1)!)} \end{aligned}$$

Die weitere Abschätzung verläuft jetzt ähnlich wie bei Hilbert[5]. Es gilt die asymptotische Formel

$$\log(1!2!\ldots n!) = \frac{1}{2}n^2\log n - \frac{3}{4}n^2 + o(n^2) \quad ^6$$

welche sich aus der Stirling'schen Formel in ihrer allgemeinen Form herleiten läßt.

[5] a.a. C.S.370
[6] "o" ist das 'Landau' sche Symbol.

Mittels dieser Formel erhält man:

$$\begin{aligned}\log D_k = {}& k^2 \log k - \frac{3}{2}k^2 + (k(m+1)+1)^2 \log(k(m+1)+1) \\ & - \frac{3}{2}(k(m+1)+1)^2 - \frac{1}{2}(k(m+2)+1)^2 \log(k(m+2)+1) \\ & + \frac{3}{4}(k(m+2)+1)^2 - \frac{1}{2}(km+2)^2 \log(km+2) \\ & + \frac{3}{4}(km+2)^2 + o(k^2) = \\ & = k^2 \log\left[\frac{(k(m+1)+1)^{(m+1)^2} k}{(k(m+2)+1)^{\frac{(m+2)^2}{2}}(km+2)^{\frac{m^2}{2}}}\right] + o(k^2) \end{aligned} \tag{4}$$

so daß also schließlich

$$D_k = \left[e_k \frac{(m+1)^{(m+1)^2}}{(m+2)^{\frac{(m+2)^2}{2}} m^{\frac{m^2}{2}}}\right]^{k^2}$$

wobei $e_k \to 1$ mit zunehmenden k. Nun wenden wir wieder den Minkowskischen Satz an und erhalten für die gesuchte Schranke $k\sqrt[k]{D_k}$ den Ausdruck

$$\left[l_k \frac{(m+1)^{(m+1)^2}}{(m+2)^{\frac{(m+2)^2}{2}} m^{\frac{m^2}{2}}}\right]^{k} \tag{5}$$

wo wieder $l_k \to 1$ für $k \to \infty$, w.z.z.w.

Für $l = 1$, wo also alle Koeffizienten „zur Konkurrenz zugelassen“ sind, erhält man aus (4) die Schranke

$$\left(e_k \frac{1}{4}\right)^k, \quad \lim \mathrm{e}_k = 1 \tag{6}$$

und das ist das Hilbert’sche Ergebnis.

Will man das so erhaltene Resultat (5) mit dem Fall vergleichen, daß alle Koeffizienten zur Konkurrenz zugelassen so hat man in (6) k durch $k.l$ zu ersetzen und findet dann für die Schranke

$$\left[e_k \left(\frac{1}{4}\right)^l\right]^k = \left[e_k \left(\frac{1}{4}\right)^{\frac{m+2}{2}}\right]^k \tag{7}$$

was nun direkt mit (5) verglichen werden kann.

Setzt man z.B. $l = 2$(so daß also immer die Hälfte der Koeffizienten des Polynoms verschwinden müssen) so wird $m = 2$ und wir erhalten aus (5) bezw. (7) für die in der eckigen Klammer stehenden Konstanten auf die es offenbar allein ankommt

$$\frac{3^9}{4^8 \cdot 2^2} = \frac{19683}{16384} \cdot \frac{1}{16}, \text{bezw.} \frac{1}{4^2} = \frac{1}{16}$$

Man sieht, daß die links stehende Zahl größer ist als die andere.

Um nun auch den allgemeinen Fall eines beliebigen Intervalles (a, b) auf den eben behandelten Spezialfall zurückzuführen, schreiben wir nach Hilbert die Diskriminante der in Frage stehenden quadratischen Form (jetzt wieder nur in dem Fall, daß alle Koeffizienten, zur Konkurrenz zugelassen sind) auf folgende Weise[7]

$$\Delta_a^b = \begin{vmatrix} \int_a^b x_1^0 x_1^0 dx_1, & \int_a^b x_1^0 x_1^1 dx_1, & \dots & \int_a^b x_1^0 x_1^{n-1} dx_1 \\ \int_a^{ba} x_2^1 x_2^0 dx_2, & \int_a^{ba} x_2^1 x_2^1 dx_2, & \dots & \int_a^{ba} x_2^1 x_2^{n-1} dx_2 \\ \dots\dots\dots\dots & \dots\dots\dots\dots & & \\ \int_a^b x_n^{n-1} x_n^0 dx_n, & \int_a^b x_n^{n-1} x_n^1 dx_n, & \dots & \int_a^b x_n^{n-1} x_n^{n-1} dx_n \end{vmatrix}.$$

Denkt man sich nun die einzelnen Glieder der Determinante aufgeschrieben, so kann jedes einzelne als n-faches Integral geschrieben werden und man erhält mit Benützung des Vandermonde' schen Determinantensatzes

$$\Delta_a^b = \int_a^b \cdots \int_a^b x_1^0 x_2^1 x_3^2 \dots x_n^{n-1} \prod_{1 \leqq i < k \leqq n} (x_k - x_i) dx_1 \dots dx_n$$

Permutiert man die $x_1 \cdots x_n$ auf jede nur mögliche Weise und versieht die so entstehenden Ausdrücke noch mit dem Signum der Permutation, so folgt durch Addition aller so entstehenden Gleichungen

$$\Delta_a^b = \frac{1}{n!} \int_a^b \cdots \int_a^b \prod_{1 \leqq i < k \leqq n} (x_k - x_i)^2 dx_1 \cdots dx_n$$

[7] Wir bezeichnen die Diskriminante mit Δ_1^b.

Aus dieser Darstellung kann man ersehen, wie sich Δ_a^b verhält, wenn man auf die Variablen x_i die Transformation

$$x_i = a + (b-a)\, y_i$$

ausübt. Dann erhält man

$$dx_1 \cdots dx_n = (b-a)^n dy_1 \cdots dy_n$$
$$x_k - x_i = (b-a)(y_k - y_i)$$

und es kommt

$$= \frac{1}{n!}\,(b-a)^{n^2} \int_0^1 \cdots \int_0^1 \prod_{1 \leqq i < k \leqq n} (y_i - y_k) dy_1 \cdots dy_n =$$

$$= (b-a)^{n^2} \Delta_0^1$$

Δ_0^1 wurde schon früher berechnet und zwar mittels des Cauchy'schen Determinantensatzes. Aus (7) ersieht man

$$n\sqrt[n]{\Delta_a^b} = \left(e_n \frac{b-a}{4}\right)^n, \quad \lim e_n = 1,$$

womit das Hilbert'sche Resultat neuerdings bewiesen ist. Ich möchte an dieser Stelle auf einen Fehler hinweisen, der in der Hilbert'schen Arbeit (Hilbert, Ges. Abh. II., S. 367–370) unterlaufen ist: Das a.a.O. eingeführte $1/\eta$ muß sich durchaus nicht mit wachsendem n der Einheit nähern und als Folge dessen gilt dies auch nicht für das weiter unten eingeführte $1/\eta'$. Es gilt vielmehr, wie die Rechnung zeigt die Relation

$$1/\eta \sim (2\pi)^n n^{\frac{1}{4}}.$$

Auf das Endresultat hat dies keinen Einfluß, da es für die Minkowski'sche Schranke nur auf $1/\eta' = \sqrt[n]{\eta_n}$ ankommt, was $\to 2\pi$ strebt, für $n \to \infty$.

4.

Es soll nun eine Verallgemeinerung der obigen Fragestellung behandelt werden. Wir zeigen den

Satz 3: Es seien $k_1, k_2, \ldots$ reelle Zahlen, welche nur der Bedingung $0 < k_1 < k_2 \cdots$ genügen sollen

Es sei $a > 0$ und so beschaffen, daß die Folge

$$f_n = (n+1)\left[\frac{\prod_{i=0}^{n-1}(k_n - k_i)}{\prod_{i=0}^{n-1}(1 + k_i + k_n)}\right]^2 a^{2k_n}$$

gegen Null strebt, wenn $n \to \infty$. Dann kann man eine Folge von Funktionen $q_n(x)$ mit

$$q_n(x) = a_0 + a_1 x^{k_1} + \cdots + a_{n-1} x^{k_{n-1}}$$

(a_i ganz, rational) so auswählen, daß die Integrale

$$\int_0^a q_n^2(x)\ dx \tag{8}$$

mit wachsendem n beliebig klein werden.

Beweis: Durch Quadrieren und Ausführung der Integrationen in (8) erhält man eine quadratische Form, deren Diskriminante folgende Gestalt hat:

$$D_a^{(n)} = \begin{vmatrix} \int_0^a x^0 dx, & \int_0^a x^{k_1} dx, & \ldots\ldots & \int_0^a x^{k_{n-1}} dx \\ \int_0^a x^{k_1+0} dx, & \int_0^a x^{k_1+k_1} dx & \ldots\ldots & \int_0^a x^{k_1+k_{n-1}} dx \\ \ldots\ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots\ldots & & \\ \int_0^a x^{k_{n-1}} dx & \int_0^a x^{k_{n-1}+k_1} dx, & \ldots\ldots & \int_0^a x^{k_{n-1}+k_{n-1}} dx \end{vmatrix}$$

Führt man hier die Substitution $x = ay$, aus, so kann man zunächst aus den Zeilen und dann aus den Spalten $a^1, a^{k_1}, a^{k_2}, \ldots a^{k_{n-1}}$ herausheben. Wegen $dx = ady$ hat man schließlich:

$$D_a^{(n)} = D_1^{(n)} a^{2(k_1+k_2+\cdots+k_{n-1})+n}$$

Es ist weiter

$$D_a^{(n)} = \begin{vmatrix} \frac{1}{1}, & \frac{1}{1+k_1}, & \ldots\ldots & \frac{1}{1+k_{n-1}} \\ \frac{1}{1+k_1}, & \frac{1}{1+k_1+k_1}, & \ldots\ldots & \frac{1}{1+k_1+k_{n-1}} \\ \ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots & & \\ \frac{1}{1+k_{n-1}}, & \frac{1}{1+k_{n-1}+k_1}, & \ldots\ldots & \frac{1}{1+k_{n-1}+k_{n-1}} \end{vmatrix}$$

Nach dem Cauchy'schen Determinantensatz wird dies

$$D_1^{(n)} = \frac{\prod_{0 \leqq i < j \leqq n-1} (k_j - k_i)^2}{\prod_{0 \leqq i,j \leqq n-1} (1 + k_i + k_j)}$$

wobei von nun an $k_0 = 0$ zu setzen ist. Der Wert der quadratischen Form kann nach dem Minkowski'schen Satz kleiner gemacht werden, als

$$n\sqrt[n]{D_a^{(n)}} = n\sqrt[n]{D_1^{(n)}}\, a^{\frac{2}{n}(k_1+\cdots+k_{n-1})+1} \tag{9}$$

Jetzt verwenden wir folgende Tatsache: Wenn $b_n>0$ und $\frac{b_{n+1}}{b_n} \to 0$, so folgt daraus auch $\sqrt[n]{b_n} \to 0$. Setzen wir den Ausdruck (9) gleich $\sqrt[n]{b_n}$ und also

$$b_n = n^n D_1^{(n)} a^{2(k_1+k_2+\cdots+k_{n-1})+n}$$

Weiter gilt

$$\frac{b_{n+1}}{b_n} = \frac{(n+1)^{n+1} D_1^{n+1}}{n^n D_1^{(n)}} a^{2k_n+1} \sim (n+1)\frac{D_1^{(n+1)}}{D_1^{(n)}} a^{2k_n}$$

Beachtet man nun, daß

$$\frac{D_1^{n+1}}{D_1^{(n)}} = \left[\frac{\prod_{i=0}^{n-1}(k_n - k_i)}{\prod_{i=0}^{n-1}(1+k_i+k_n)}\right]^2$$

ist, so folgt daraus unmittelbar die Behauptung.

Durch Spezialisierung kann man aus Satz 3 noch einige Folgerungen ziehen:

Setzt man $k_n = n$, so hat man

$$f_{n+1} = \frac{(n+2)(n!)^2}{((n+1)\cdots 2n)^2} a^{2n} = (n+2)\frac{(n!)^4}{(2n!)^2} a^{2n} \cong$$
$$\cong (n+2)\frac{n^{4n}e^{-4n}4\pi^2 n^2}{(2n)^{4n}e^{-4n}4\pi n} a^{2n} \sim n^2 \frac{1}{4^{2n}} a^{2n}.$$

Da dies für $a<4$ gegen Null strebt, ergibt sich daraus neuerdings der Hilbert'sche Satz.

Setzt man $k_n = p.n$, wobei p eine positive ganze Zahl bedeuten soll, so ergibt sich

$$f_{n+1} = (n+2)\frac{p^{2n}(n!)^2}{p^{2n}\left[\frac{(2n)!}{(n!)}\right]^2} a^{2pn} \sim n^2\frac{1}{4^{2n}} a^{2pn}.$$

Dieser Ausdruck geht gegan Null wenn $a<4^{\frac{1}{p}}$ ist. Man hat also das Ergebni:

Satz 3a: Ist $a<\sqrt[p]{4}$, so kann man eine Polynomfolge

$$s_n(x) = a_0 + a_1 x^p + \cdots + a_n x^{pn}$$

mit ganzzahligen a_i so auswählen, daß die Integrale

$$\int_0^a s_n^2(x)dx$$

mit wachsendem n beliebig klein werden.

5.

Wir wollen jetzt einem weitere Verallgemeinerung der obigen Fragestellung betrachten, nämlich den Fall, daß statt eines Intervalls (a, b) eine beliebige Kurve C der komplexen Zahlenebene zugrundegelegt wird. Der Einfachheit halber nehmen wir an, es sei C gegeben durch eine Parameterdarstellung $z = z(s) = x(s) + iy(s)$, wobei s die Bogenlänge bedeuten soll und x und y stückweise stetig differenzierbar sein sollen.

Wir betrachten nun Polynome $(n-)$ten Grades

$$p_n(z) = a_0 + a_1 z + \cdots + a_{n-1} z^{n-1} \tag{10}$$

wobei jetzt die a_i Zahlen sind, welche nicht mehr als ganz rational, sondern als ganze Zahlen aus $k(i)$ gewählt werden sollen.

Wir betrachten nun die Integrale

$$\int_C |p_n(z)|^2 d|z| \tag{11}$$

und fragen, wie C beschaffen sein muß, damit man eine Polynomfolge so auswählen kann, daß die damit gebildeten Integrale beliebig klein werden. (Mit wachsendem n).

Als einfaches Beispiel nehmen wir an, C sei ein Kreis um den Ursprung 0 mit dem Radius r. Dann erhalten wir

$$\int_{|z|=r} p_n(z)\overline{p_n(z)}d|z| = 2r\pi \sum_{i=0}^{n-1} |a_i^2| r^{2i}$$

Man sieht, daß für $r<1$ dieses Integral mit wachsendem n beliebig klein gemacht werden dann, während dies für $r>1$ nicht möglich ist.

Im allgemeinen Fall spielt statt des Radius' eine geometrische Konstante der Kurve C eine Rolle, nämlich der von M. Fekete eingeführte transfinite Durchmesser von C. Wir schicken daher dessen Definition voraus:

Sei A eine beliebige abgeschlossene Punktmenge der z-Ebene. Setzt man

$$m_n = \max \sqrt[\binom{n}{2}]{\prod_{i \leqq k < i \leqq n} |z_i - z_k|}, \quad z_j \in A \tag{12}$$

dann ist $m_n > m_{n+1} > \cdots$ und es existiert also $\lim_{n\to\infty} m_n = c(A)$. c heißt der transfinite Durchmesser von A.[8]

Mit diesen Bezeichnungen gilt nun der Satz:

Satz 4: Ist der transfinite Durchmesser c von C kleiner als 1, so kann das Integral (11), für eine Folge von Polynomen (10) gebildet, mit wachsendem n beliebig klein gemacht werden.

Beweis: Das Integral (11) kann als Hermite' sche Form aufgefaßt werden, deren Diskriminante folgendermaßen aussieht

$$D_C = \begin{vmatrix} \int\limits_C z^0 \bar{z}^0 d|z|, & \int\limits_C z^0 \bar{z}^1 d|z|, & \dots & \int\limits_C z^0 \bar{z}^{n-1} d|z| \\ \int\limits_C z^1 \bar{z}^0 d|z|, & \int\limits_C z^1 \bar{z}^1 d|z|, & \dots & \int\limits_C z^1 \bar{z}^{n-1} d|z| \\ \dots\dots & & & \\ \int\limits_C z^{n-1} \bar{z}^0 d|z|, & \int\limits_C z^{n-1} \bar{z}^1 d|z|, & \dots & \int\limits_C z^{n-1} \bar{z}^{n-1} d|z| \end{vmatrix}$$

Schreiben wir nun in der i-ten Zeile die Intergrationsvariable z_{i-1} statt z, so erhalten wir, ähnlich wie in 3.

$$\begin{aligned} D_C &= \int\limits_C \cdots \int\limits_C z_0^0 z_1^1 z_2^2 \cdots z_{n-1}^{n-1} \prod_{0 \leqq i < k \leqq n-1} (z_k - z_i) d|z_o| \cdots d|z_{n-1}| \\ &= \frac{1}{n!} \int\limits_C \cdots \int\limits_C \prod_{0 \leqq i < k \leqq n-1} |z_k - z_i|^2 d|z_o| \cdots d|z_{n-1}| \end{aligned}$$

Aus dieser Darstellung folgt nun wegen (12).

$$D_C \leqq \frac{l^n}{n!} m_n^{n(n+1)}$$

wobei l die Länge der Kurve bedeutet. Weiter wird

$$n\sqrt[n]{D_C} \leqq \frac{n.l^n}{\sqrt[n]{n!}} m_n^{(n+1)} \sim m_n^{n+1} \tag{13}$$

Ist nun der transfinite Durchmesser von C kleiner als 1, so ist von einem gewissen n an jedenfalls $m_n < 1$ und die rechtsstehende Schranke geht gegen Null (und zwar schneller als $(c+\varepsilon)^n$ mit $\varepsilon > 0$.) Die Anwendung des Minkowski' schen Satzes liefert die Behauptung.

Spezialfälle: 1) Sei C ein Intervall (a, b). In diesem Fall ist $c = \frac{|b-a|}{4}$ und wir erhalten das frühere Resultat.

[8] Beweis siehe Fekete, Math. Zeitschr. 17

2) Sei C ein Kreis mit dem Redius r. Hier ist $c = r$ und wir erhalten das obige Beispiel wieder.
3) C sei das Paar reeller Intervalle $-\frac{l}{2} \leqq x \leqq -\frac{d}{2}, \frac{d}{2} \leqq x \leqq \frac{l}{2}$
Hier ist $c = \left(\frac{l^2-d^2}{16}\right)^{\frac{1}{2}}$. Es muß also $\sqrt{l^2 - d^2} < 4$ sein, wenn $c < 1$ sein soll.

6.

Bei der Form des Hilbert'schen Satzes liegt die Frage nahe, ob man das Intervall von der Länge 4 in dem Hilbert'schen Ergebnis nicht durch ein größeres ersetzen kann. Darüber gilt der folgende

Satz 5: Wenn $(b - a) \geqq 4$ ist, so kann man auf keine Weise ganzzahlige Polynome $p_{n-1}(x)$ vom Grade $n - 1$ so auswählen, daß mit wachsendem n die Integrale

$$\int_a^b p_{n-1}^2(x)dx$$

beliebig klein werden.

Zum Beweis haben wir wieder die quadratische Form zu betrachten, welche durch das Integral dargestellt wird. Es ist die Aufgabe zu zeigen, daß diese Form nicht beliebig klein gemacht werden kann (durch ganzzahlige Wahl der a_j und mit wachsendem n). Geometrisch bedeutet das, daß ein konvexer Körper im n-dimensionalen Raum keinen Gitterpunkt enthält. Dies zu zeigen gelingt auf folgende Weise: Wir transformieren die quadratische Form auf eine Summe von Quadraten von Linearformen und zwar durch die unimodulare Transformation

$$\begin{aligned} y_i &= \sum_{k=i}^{n-1} b_{ik} a_k \quad i = 0, 1, \dots n - 1. \\ b_{ii} &= 1 \end{aligned}$$

Daß eine solche Transformation stets existiert, folgt durch das bekannte Verfahren der Transformation auf die kanonische Form. In den neuen Variablen hat die Form dann notwendig die Gestalt

$$\sum_{i=0}^{n-1} k_i y_i^2 \tag{14}$$

wobei die Zahlen $k_i = \frac{D_i}{D_{i-1}}$ sind $(D_o = 1, D_i)$ die Diskriminante der aus dem Polynom i-ten Grades entstehenden quadratischen Form.) Aus der bereits oben durchgeführten Berechnung von D_i folgt

$$k_m = \frac{((m-1)!)^4}{(2m-3)!^2(2m-1)(2m-2)^2}(b-a)^{2m-1}$$

Daraus ergibt sich

$$\frac{k_{m+1}}{k_m} = (b-a)^2 \frac{m^4}{16m^4 - 4m^2}.$$

Dies ist >1 für $(b-a) \geqq 4$ und (wenn es für alle m gelten soll) auch für kein kleineres Intervall. Die k_i sind also monoton wachsend für $(b-a) \geqq 4$.

Sei nun a_{n-1} in dem ganzzahligen Polynom der höchste von Null verschiedene Koeffizient. Dann geht aus der Darstellung (14) hervor, daß die in Frage stehende quadratische Form größer ist, als $k_{n-1}y_{n-1}^2$. Dies ist aber gleich $k_{n-1}a_{n-1}^2$ und da a_{n-1} ganzzahlig und von Null verschieden ist, so ist dies $\geqq k_{n-1} > k_1$ und zwar gilt das für jede ganzzahlige Wahl der a_i, wenn nicht alle verschwinden.

7.

Wir wollen nun den Satz 3a in gewissem Sinne verallgemeinern. Sei C wieder eine Kurve der z-Ebene mit den in 5. geforderten Eigenschaften. Dann gilt

Satz 6: Sei C_p diejenige Zahlenmenge, welche aus C entsteht wenn man jede Zahl aus C in die p-te potenz erhebt. Den transfiniten Durchmesser der Menge C_p bezeichnen wir mit c_p. Dann gibt es eine Folge von Polynomen „mit Lücken von den Länge p"

$$s_n(z) = a_0 + a_1 z^p + \cdots + a_n z^{np}$$

so daß die mit ihnen gebildeten Integrale

$$\int_C |s_n(z)|^2 d|z|$$

mit wachsendem n beliebig klein werden, wenn nur $c_p < l$ ist. (a_i als ganze Zahlen aus $k(i)$ wählbar)

Beweis: Hier bekommen wir als Diskriminante der Hermite' schen Form die Determinante

$$D_C^{(p)} = \begin{vmatrix} \int_C z^0 \bar{z}^0 d|z|, & \int_C z^0 \bar{z}^p d|z|, & \dots & \int_C z^0 \bar{z}^{(n-1)p} d|z| \\ \int_C z^p \bar{z}^0 d|z|, & \int_C z^p \bar{z}^p d|z|, & \dots & \int_C z^p \bar{z}^{(n-1)p} d|z| \\ \dots & & & \\ \int_C z^{(n-1)p} \bar{z}^0 d|z|, & \int_C z^{(n-1)p} \bar{z}^p d|z|, & \dots & \int_C z^{(n-1)p} \bar{z}^{(n-1)p} d|z| \end{vmatrix}$$

und dies wird nach dem nun schon öfter angewandten Schluß weiter

$$D_C^{(p)} = \int_C \cdots \int_C z_0^0 z_1^p \cdots z_{n-1}^{(n-1)p} \prod_{0 \leqq i<k \leqq n-1} (\bar{z}_k^p - \bar{z}_i^p) d|z_o| \cdots d|z_{n-1}| =$$

$$= \frac{1}{n!} \int_C \cdots \int_C \prod_{0 \leqq i<k \leqq n-1} |z_k^p - z_i^p|^2 d|z_o| \cdots d|z_{n-1}|$$

Ist jetzt

$$m_n = \max \sqrt[\binom{n}{2}]{\prod_{0 \leqq i<k \leqq n-1} |w_k - w_i|}, \quad w_j \in C_p$$

so hat man nach (15)

$$D_C^{(p)} \leqq \frac{l^n}{n!} m_n^{n(n+1)}$$

und die Minkowskische Schranke wird

$$n \sqrt[n]{D_c^{(p)}} \leqq \frac{l \cdot n}{\sqrt[n]{n!}} m_n^{n(n+1)} \sim m_n^{(n+1)}$$

von einem gewissen n an ist jedenfalls $m_n<l$ und die rechte Seite geht gegan Null, womit alles gezeigt ist.

Beispiele: I) Ist C der Kreis mit dem Radius r so wird $c_p = r^p$ und soll $c_p < 1$ sein, so muß $r < 1$ sein, was natürlich in diesem Fall sofort direkt bestätigt werden kann.

2) Betrachten wir nun ein Intervall auf der reellen Achse (a, b) mit $0 \leqq a<b$. In diesem Fall wird C_p das Intervall (a^p, b^p) und

$$c_p = \frac{b^p - a^p}{4},$$

Soll das < 1 sein, so folgt

$$b<\sqrt[p]{4 + a^p}.$$

Für die Länge des Intervalls (a, b) erhält man die Schranke

$$(b - a)<\sqrt[p]{4 + a^p} - a. \tag{16}$$

Nun gilt die Ungleichung $(a \geqq 0)$

$$\sqrt[p]{4 + a^p} - a \leqq \frac{4}{(4 + a^p)^{\frac{p-1}{p}} + (p - 1)a^{p-1}} \leqq \frac{4}{4^{\frac{p-1}{p}} + (p - 1)a^{p-1}}$$

Man kann dies folgendermaßen einsehen: Setzt man $(4+a^p)^{\frac{1}{p}}=c$, so ist $c>a$ und

$$c-a\leqq\frac{c^p-a^p}{c^{p-1}+c^{p-2}a+\cdots+a^{p-1}}\leqq\frac{4}{c^{p-1}+(p-1)a^{p-1}}$$

Daraus sieht man, daß die Schranke (16) mit zunehmendem a gegen Null strebt. Speziell für $a=C$ erhält man das schon oben hergeleitete Resultat (Satz 3a)

$$b<\sqrt[p]{4}.$$

Eine grobe Abschätzung von c_p erhält man, wenn man berücksichtigt, daß

$$|z_i^p-z_k^p|=|z_i-z_k||z_i^{p-1}+\cdots+z_k^{p-1}|\leqq|z_i-z_k|pd^{p-1}$$

wobei d der Minimalabstand eines Punktes von C vom Ursprung 0 bedetet. Daraus folgt weiter

$$c_p\leqq c.p.d^{\,p-1}$$

8.

Wir wollen jetzt die Hilbert'sche Fragestellung in einer ganz anderen Richtung verallgemeinern. Wir betrachten eine Kurve C der x,y Ebene: $x=x(s),y=y(s)$, wobei s die Bogenlänge auf C bedeuten möge und x und y etwa stückweise stetig differenzierbar sein sollen. Es sei $h_n(x,y)$ ein Polynon n-ten Grades, welches homogen in x und y ist und ganzzahlige Koeffizienten hat

$$h_n(x,y)=a_0x^{\,n}+a_1x^{\,n-1}y+\cdots+a_ny^{\,n},\quad a_i\text{ ganz.}\tag{17}$$

Wir fragen nun für welche C sich die Integrale

$$\int\limits_C h_n^2(x,y)ds\tag{18}$$

durch geeignete Wahl einer Polynomfolge (17) mit wachsendem n beliebig klein machen lassen. Wir beginnen mit einem einfachen Spezialfall:

Satz 7: Wenn C die Strecke $x=1$, $0\leqq y\leqq 1$ ist, dann können jedenfalls die Integrale (18) mit wach-sendem n beliebig klein gemacht werden.
Bew.: In diesem Fall lautet unser Integral

$$\int\limits_0^1(a_0+a_1y+\cdots+a_ny^n)^2dy$$

und wir wissen, daß, die Diskriminante dieser quadratischen Form $= D_1$ gesetzt, die Abschätzung gilt

$$(n+1)\sqrt[n+1]{D_1} \sim \left(\frac{1}{4}e_n\right)^{n+1}, \quad \lim \quad e_n = 1$$

Es kann also jedenfalls in diesem speziellen Fall das Integral beliebig klein werden.

Satz 8: Ist C die Strecke AB, ist ferner der Inhalt des Dreiecks $OAB < 2$, so können die Integrale (18) mit wachsendem n beliebig klein gemacht werden.

Beweis: A habe die Koordinaten x_0, y_0, B habe die Koordinaten $x_1 y_1$. Sei zunächst $\Delta = x_0 y_1 - y_0 x_1 \neq 0$. Dann wird durch das Integral (18) wieder eine quadratische Form in den a_j dargestellt, deren Diskriminante den folgenden Wert hat:

$$D_{AB} = \begin{vmatrix} \int\limits_C x^{2n} ds, & \int\limits_C x^{2n-1} y\, ds, & \dots & \int\limits_C x^n y^n\, ds \\ \int\limits_C x^{2n-1} y ds, & \int\limits_C x^{2n-2} y^2 ds, & \dots & \int\limits_C x^{n-1} y^{n+1} ds \\ \dots & & & \\ \int\limits_C x^n y^n ds, & \int\limits_C x^{n-1} y^{n+1} ds, & \dots & \int\limits_C y^{2n} ds \end{vmatrix}$$

und daraus folgt weiter

$$\begin{aligned} D_{AB} &= \int\limits_C \cdots \int\limits_C x_0^n x_1^{n-1} y_1 x_2^{n-2} y_2^2 \cdots y_n^n \prod_{0 \leqq i < k \leqq n} (x_k y_i - x_i y_k) ds_0 \cdots ds_n \\ &= \frac{1}{(n+1)!} \int\limits_C \cdots \int\limits_C \prod_{0 \leqq i < k \leqq n} (x_k y_i - x_i y_k)^2 ds_0 \cdots ds_n \end{aligned}$$

dabei sind immer die x_j und y_j als Funktionem von s_j ausgedrückt zu denken. Wir führen nun folgende Transformation aus

$$\begin{aligned} u_j &= \frac{y_1 - y_0}{x_0 y_1 - y_0 x_1} x_j + \frac{x_0 - x_1}{x_0 y_1 - y_0 x_1} y_j \\ v_j &= \frac{-y_0}{x_0 y_1 - y_0 x_1} x_j + \frac{x_0}{x_0 y_1 - y_0 x_1} y_j \end{aligned}$$

Diese Transformation führt die Strecke AB in die Strecke $x = 1$, $0 \leqq y \leqq 1$ über.

Die Determinante der Transformation ist $\frac{1}{\Delta}$. Es wird also

$$x_k y_i - x_i y_k = \Delta(u_k v_i - u_i v_k)$$

$$ds_j = \sqrt{(x_1 - x_0)^2 + (y_i - y_0)^2}\, ds'_j$$

also $ds_j = L ds'_j$,
wo L die Länge von AB bedeutet und ds'_j das Bogenelement des Bildes von C ist. Nach Ausübung der Transformation erhält man daher

$$\begin{aligned} D_{AB} &= \frac{1}{(n+1)!}\Delta^{n(n+1)} L^{(n+1)} \int_0^1 \cdots \int_0^1 \prod_{0 \leqq i<k \leqq n} (u_k v_i - u_i v_k)^2 \, ds'_0 \cdots ds'_n \\ &= \Delta^{n(n+1)} L^{(n+1)} D_1 \end{aligned}$$

und die Minkowski' sche Schranke wird

$$n\Delta^n \sqrt[n]{D_1} \sim n\Delta^n \left(\frac{1}{4} e_n\right)^n, \quad \lim \quad e_n = 1 \tag{19}$$

Damit ist die Behauptung für den Fall $\Delta \neq 0$ bewiesen. Im Falle $\Delta = 0$, wo also OA und B auf einer Geraden liegen, kann schon jedes einzelne der Integrale (18) durch ganzzahlige Wahl der a_i beliebig klein gemacht werden, gleichgültig wie grob das Intervall ist, über welches es erstreckt wird. Setzt man nämlich das Intervall etwa in die Form $x = s \cos \alpha$, $y = s \sin \alpha$, $s_0 \leqq s \leqq s_1$, so wird (18)

$$(a_0(\cos \alpha)^n + a_1(\cos \alpha)^{n-1} \sin \alpha + \cdots + a_n(\sin \alpha)^n)^2 \int_{s_0}^{s_1} s^{2n} ds$$

und das kann schon für festes n durch ganzzahlige Wahl der a_i beliebig klein gemacht werden.

9.

Bevor wir uns dem allgemeinen Fall zuwenden, führen wir eine neue geometrische Konstante der Kurve C ein, welche für die Integrale (18) eine analoge Rolle spielt, wie der transfinite Durchmesser für, die Integrale des Satzes 6.

Statt C betrachten wir eine beliebige abgeschlossene Menge A der x, y-Ebene. Seien $(x_1, y_1)(x_2 y_2) \cdots (x_4 y_4)$ beliebige Punkte von A. Wir setzen

$$f_n = \max \sqrt[\binom{n}{2}]{\prod_{1 \leqq i<k \leqq n} |x_k y_i - x_i y_k|} \tag{20}$$

Dann behaupte ich folgenden

Satz 9: Es ist $f_n > f_{n+1} > \cdots$ und daher existiert $\lim f_n = f(A)$. Der hiernach existierende Grenzwert werden der transfinite Flächeninhalt von A (in Bezug auf 0)[9] genannt.

Beweis: Der Beweis wird ähnlich geführt, wie bei Fekete (Fußnote 8) 8.12: f_n ist das geometrische Mittel aus den Flächeninhalten aller Parallelogramme, die eine Ecke in 0 und zwei weitere Ecken in zwei von den Punkten $(x_j y_j)$ haben. Da A abgeschlossen sein soll, so muß f_n sein Maximum auf A annehmen. Dies soll etwa in den Punkten $(\xi_1, \eta_1) \cdots (\xi_n, \eta_n)$ eintreten. Wir setzen

$$\varphi(A) = \varphi = f_n^{\binom{n}{2}} = \prod_{1 \leqq i < k \leqq n} |\xi_k \eta_i - \xi_i \eta_k| \tag{21}$$

Wir betrachten weiter ein „maximales $(n+1)$-tupel" $(u_1, v_1) \cdots (u_{n+1} v_{n+1})$ und greifen den Punkt $(u_{n+1} v_{n+1})$ heraus.

Es wird

$$\psi^{10} = f_{n+1}^{\binom{n+1}{2}} = \prod_{1 \leq i < k \leq n+1} |u_k v_i - v_i v_k| = |v_1 v_{n+1} - u_{n+1} v_1| \cdots |u_n v_{n+1} - u_{n-1} v_n| F_n \tag{22}$$

wobei F_n ein Produkt von Faktoren ist, in dem nur mehr die Zahlen (u_i, v_i), $i = 1, 2, \ldots n$, vorkommen.

Nach der Definition von φ folgt weiter $F_n \leqq \varphi$ und also

$$\psi \leqq \varphi \prod_{i=1}^{n} |u_i v_{n+1} - u_{n+1} v_i|$$

Machen wir dasselbe statt für $(u_{n+1} v_{n+1})$ mit allen anderen Punkten, so erhalten wir $(n+1)$ Gleichungen folgender Form

$$\psi \leqq \varphi \prod_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^{n+1} |u_i v_j - v_j v_i| \quad j = 1, 2, \ldots (n+1)$$

Multiplizieren wir diese Gleichungen miteinander, so tritt in den rechtsstehenden Produkten jeder Punkt genau zweimal auf und wir erhalten

$$\psi^{n+1} \leqq \varphi^{n+1} \psi^2$$

[9] Diesen Zusatz wollen wir in Zukunft weglassen.
[10] $\psi = \psi(A)$.

Erheben wir dies in die $\frac{2}{(n-1)n(n+1)}$ -te Potenz
so kommt gerade $\psi^{\frac{2}{n(n+1)}} < \varphi^{\frac{2}{(n-1)n}}$
und das ist die Behauptung.

Für die so eingeführte geometrische Konstante f sollen nun einige Eigenschaften bewiesen werden, welche den von Fekete[11] für den transfiniten Durchmesser bewiesenen analog sind.
1) Wir ordnen jedem Punkt von A denjenigen Punkt von A zu, der auf dem selben Strahl durch O liegt, aber von O am weitesten entfernt ist. Wegen der Beschränktheit und Abgeschlossenheit von A gibt es sicher einen solchen Punkt. Die so aus A entstehende Teilmenge von A bezeichnen wir mit A_r. Dann gilt ersichtlich

$$f(A) = f(A_r)$$

denn das Maximum des Produktes in (20) kann nur auf A_r angenommen werden.
2) Weiters gelten die folgenden Tatsachen

I. Ist $A \subset B$, so ist $f(A) < f(B)$

II. Entsteht $\bar{A}$ aus A durch Adjunktion eines Punktes, so gilt $f(\bar{A}) = f(A)$

III. Ist A nicht leer und bedeutet $A(\delta)$ die Menge derjenigen Punkte der Ebene, die in den um die Punkte von A als Mittelpunkte konstruierten Quadraten mit der Seitenlänge δ liegen, so ist $\lim f(A(\delta)) = f(A), (\delta \to 0)$.

Aus diesen drei Eigenschaften folgt nach Fekete[11] daß f für den perfekten Kern von A denselben Wert hat wie für A.

Nun der Beweis von I.–III: I ist klar.
Um II. zu beweisen müssen wir zwei Fälle unterscheiden, Erstens (wenn wir uns noch immer der Bezeichnungen des Beweises zu Satz 9 bedienen) daß der adjungierte Punkt $P(u,v)$ nicht im Produkt (22) enthalten ist

$$\psi(A+P) = \psi(A)$$

und zweitens, daß (u,v) in dem Maximal-n-tupel $(u_1,v_1)\cdots(u_{n+1},v_{n+1})$ enthalten ist, etwa $(u,v) = (u_{n+1}v_{n+1})$. Dann wird

$$\begin{aligned}\psi(A+P) &= \prod_{i=1}^{n}(u_i v_{n+1} - u_{n+1}v_i) \cdot \prod_{1 \leqq i < k \leqq n}(u_i v_k - u_k v_i) \\ &\leqq \prod_{i=1}^{n}(u_i v_{n+1} - u_{n+1}v_i)\varphi(A)\end{aligned}$$

Bezeichnen wir mit $\frac{1}{2}F$ das Maximum des Flächeninhaltes von Dreiecken OQP, $Q \in A$, so gilt

$$f_{n+1} = \psi(A+P)^{\frac{2}{n(n+1)}} \leqq F^{\frac{2}{n+1}} \varphi(A)^{\frac{2}{n(n+1)}} = F^{\frac{2}{n+1}} f_n^{\frac{n-1}{n+1}},$$

woraus die Behauptung folgt.

Beweis von III.: Setzen wir $\frac{n(n-1)}{2} = v$, so wird

$$f_n^v(A(\delta)) = \prod_{1 \leqq i < k \leqq n} ((x_i + \alpha_i)(y_k + \beta_k) - (x_k + \alpha_k)(y_i + \beta_i))$$

wobei $(x_i, y_i) \in A$ und $\max(|\alpha_i|, |\beta_i|) < \delta$. Wegen

$$\begin{aligned} |(x_i + \alpha_i)(y_k + \beta_k) - (x_k + \alpha_k)(y_i + \beta_i)| &= |x_i y_k| + x_k y_i + \\ &+ x_i\beta_k + y_k\alpha_i - x_k\beta_i - y_i\alpha_k + \alpha_i\beta_k - \alpha_k\beta_i| \leqq \\ &\leqq |x_i y_k - x_k y_i| + 4\delta + 2\delta^2 \leqq |x_i y_k - x_k y_i| + L\delta \end{aligned}$$

$(K = \max_{x,y \in A}(|x|, |y|)$, L Konstante $> 4K + 2\delta)$ gilt

$$\begin{aligned} f_n^v(A(\delta)) \leqq & \prod_{1 \leqq i < k \leqq n} |x_i y_k - x_k y_i| + \prod_{1 \leqq i < k \leqq n} (|x_i y_k - x_k y_i| + L\delta) \\ & - \prod_{1 \leqq i < k \leqq n} |x_i y_k - x_k y_i| \\ \leqq & \prod_{1 \leqq i < k \leqq n} |x_i y_k - x_k y_i| + (M + L\delta)^v - M^v \end{aligned}$$

wo M das Maximum der Flächeninhalte der Dreiecke ORS, R, $S \in A$ bezeichne möge.

Aus der letzten Ungleichung folgt genau wie bei Fekete[11] die Behauptung.

3) Der transfinite Flächeninhalt der Strecke AB ist

$$\frac{s.p}{4}$$

wobei p den Abstand der Geraden, auf welcher AB liegt, von 0 bedeutet und s die Länge der Strecke ist.

Zum Beweise nehmen wir auf AB die n Punkte $(\xi_1, \eta_1) \cdots (\xi_n, \eta_n)$ so an, daß das Produkt (20) sein Maximum erreicht. Da die Gerade auf der AB liegt vom Ursprung den Abstand P hat, so wird in diesem Fall

$$f_n^v = \prod_{1 \leqq i < k \leqq n} |\xi_i\eta_\epsilon - \xi_\epsilon\eta_i| = \left[\prod_{1 \leqq i < k \leqq n} \sqrt{(\xi_i - \xi_k)^2 + (\eta_i - \eta_k)^2}\right] p^v = m_n^v p^v$$

[11] Fekete, Math. Zeitschr. 32.

wobei m_n die beider Berechnung des transfiniten Durchmessers von AB auftretenden Maximalprodukte bedeuten. Damit ist die Berechnung des transfiniten Flächeninhaltes auf die des transtransfiniten Durchmessers zurückgeführt und da der transfinite Durchmesser von AB gleich $\frac{s}{4}$ ist, wird der transfinite Flächeninhalt wie behauptet

$$p \cdot \frac{s}{4}$$

4) Ist K ein Kontinuum, welches nicht ganz auf einer Geraden durch 0 liegt, so ist $f(K)>0$.

Zum Beweis schlage man um 0 einen Kreis (K_1), dessen Radius mit d_1 bezeichnet werden möge, so daß der im Kreisring $d_1^2 \leqq x^2 + y^2 \leqq d^2$ liegende Teil von K nicht ganz auf einer Geraden durch 0 liegt.

Man kann dann also einen Winkel δ. mit $0<\delta \leqq \frac{\pi}{2}$ so angeben, daß ein Teil der Menge K von 0 aus unter dem Winkel δ gesehen wird. Unter Benützung von 1) erkennt man, daß der transfinite Flächeninhalt des Teiles von K, der in obigem Kreisring und in dem Sektor mit dem Winkel δ liegt, größer ist, als der transfinite Flächeninhalt der Sehne von K_1 welche den Zentriwinkel δ hat. Jeder Strahl von 0 zu einem Punkt dieser Sehne muß ja einen Punkt von K treffen, da K als zusammenhängend angenommen wurde. Nach
3) ist der transfinite Flächeninhalt der Sehne gleich

$$d_1^2 \frac{\sin \delta}{4} > 0,$$

womit die Behauptung bewiesen ist.
5) Geht A durch die lineare Transformation

$$\begin{aligned} x' &= ax + by \\ y' &= cx + dy \end{aligned} \qquad ad - bc = D$$

in A' über, so gilt

$$f(A') = Df(A).$$

Der Beweis folgt aus der Tatsache, daß sich bei der Transformation jeder einzelne der Faktoren in dem Produkt (20) mit D multipliziert.

10.

Nun zeigen wir den Satz

Satz 10: Ist der transfinite Flächeninhalt der Kurve C kleiner als 1, so können die Integrale (18) durch geeignete Wahl einer Folge von Polynomen (17) mit wachsendem n beliebig klein gemacht werden.

Beweis: Die Integrale stellen wieder quadratische Formen in den a_i dar, deren Diskriminanten die Gestalt haben

$$D_C = \begin{vmatrix} \int\limits_C x^n x^n ds, & \int\limits_C x^n x^{n-1} y ds, & \dots & \int\limits_C x^n y^n ds \\ \int\limits_C x^{n-1} y x^n ds, & \int\limits_C x^{n-1} y x^{n-1} y ds, & \dots & \int\limits_C x^{n-1} y y^n ds \\ \dots & & & \\ \int\limits_C y^n x^n ds, & \int\limits_C y^n x^{n-1} y ds, & \dots & \int\limits_C y^n y^n ds \end{vmatrix}$$

Dies läßt sich nach der schon öfter durchgeführten Überlegung in der Form schreiben

$$D_C = \frac{1}{(n+1)!} \int\limits_C \cdots \int\limits_C \prod_{0 \leqq i < k \leqq n} (x_i y_k - x_k y_i)^2 ds_0 \cdots ds_n$$

Sei nun $f(C)$ kleiner als 1. Wir wählen ein $\varepsilon>0$ so, daß auch noch $f(C)+\varepsilon<1$ ist. Nach der Definition des transfiniten Flächeninhaltes wird von einem gewissen n an für alle $(x_i y_i) \in 0AB$

$$\prod_{0 \leqq i < k \leqq n} (x_i y_k - x_k y_i) \leqq (f(C)+\varepsilon)^{\frac{n(n+1)}{2}}$$

und also der Integrand in obigem Integral $\leqq (f(C)+\varepsilon)^{n(n+1)}$. Daraus folgt

$$D_C \leqq \frac{1}{(n+1)!} L^{n+1} (f(C)+\varepsilon)^{n(n+1)}$$

und schließlich

$$(n+1)\sqrt[n+1]{D_C} \leqq \frac{L(n+1)}{\sqrt[n+1]{(n+1)!}} (f(C)+\varepsilon)^n \sim (f(C)+\varepsilon)^n$$

womit der Satz bewiesen ist. Ähnlich zeigt man

Satz 11: Bezeichnet man den transfiniten Flächeninhalt der Kurve $x = x(s)^p, y = y(s)^p$ mit f_p und ist $f_p<1$, so kann man homogene Polynome mit durch p teilbarem Grad und mit „Lücken von der Länge p“ so angeben, daß die in Rede stehenden Integrale mit wachsendem n beliebig klein werden.

11.

In diesem Abschnitt wollen wir wieder eine Kurve C der komplexen z-Ebene betrachten, welche geeigneten Einschränkungen unterworfen sei.

Wir bilden die Integrale

$$I_n = \int_c |p_n(z)|^2 d|z|, \quad p_n(z) = a_0 + \cdots + a_{n-1} z^{n-1}, \tag{23}$$

wobei jetzt die a_i ganze Zahlen aus dem Körper $K(i\sqrt{m})$ sein sollen ($m>0$, quadratfrei, ganz rational)
Wir beweisen

Satz 12: Wenn der transfinite Durchmesser c von C kleiner als 1 ist, können in (23) die p_n so gewählt werden, daß $I_n \to 0$ wenn $n \to \infty$.

Beweis: I_n ist einen hermitesche Form in den a_i. Die a_j sollen ganze Zahlen aus $K(i\sqrt{m})$ sein. Es gilt daher

$$a_i = x_i + iy i\sqrt{m} \quad m \equiv 2, \quad m \equiv 1 \pmod 4$$

$$\frac{v_i + 2u_i + iv\sqrt{m}}{2} \quad m \equiv 3 \pmod 4$$

x, y, u, v, ganz rational. Die hermitesche Form wird so eine hermitesche Form in den $2n$ Variablen x_i, y_i bezw. u_i, v_i. Indem man die Koeffizienten noch in Real- und Imaginärteil spaltet erhält man eine quadratische Form der $2n$ Veränderlichen x_i, y_i bezw. u_i, v_i. Ihre Diskriminante ist nun zu berechnen. Nehmen wir allgemein eine Form

$$F = \sum_{i,k=1}^{n} b_{1k} a_i \bar{a}_k, \quad |\text{Det } b_{2k}| = D, \quad b_{ki} = \bar{b_{ik}}$$

$$b_{ik} = \alpha_{ik} + i\beta_{ik}$$

so wird die zugeordnete quadratische Form im ersten Fall

$$\begin{aligned} F &= \sum (\alpha_{ik} + i\beta_{ik})(x_i + i\sqrt{m}y_i)(x_k - i\sqrt{m}y_k) \\ &= \sum \alpha_{ik}\alpha_i x_k + \sum \alpha_{ik} m y_i y_k + \sum \beta_{ik}\sqrt{m} x_i y_k \\ &\quad - \sum \beta_{ik}\sqrt{m} y_i x_k \end{aligned}$$

Die Determinante dieser quadratischen Form in $2n$ Variablen, die wir mit Δ bezeichnen, „zerfällt“ in 4 Teilquadrate, was wir in symbolischer Form so schreiben

$$\begin{vmatrix} \alpha_{ik} & \beta_{ik}\sqrt{m} \\ -\beta_{ik}\sqrt{m} & \alpha_{ik} m \end{vmatrix} = (\sqrt{m})^{2n} \begin{vmatrix} \alpha_{ik} & \beta_{ik} \\ -\beta_{ik} & \alpha_{ik} \end{vmatrix}$$

Der Wert der letzteren Determinante ist aber D^2. Um dies einzusehen hat man nur die mit i multiplizierte $(n+k)-$ te Spalte zur k-ten zu addieren und danach die mit $-i$ multiplizierte k-te Zeile zur $(n+k)$-ten Zeile zu addieren. $(k = 1, 2 \ldots n)$ Insgesamt haben wir also

$$\Delta = m^n D^2 \quad m \not\equiv 3 \pmod 4$$

Analog wird im zweiten Fall

$$\Delta = \left(\frac{\sqrt{m}}{2}\right)^{2n} D^2$$

Für D haben wir bereits oben die Abschätzung hergeleitet

$$D \leqq \frac{L^n}{n!} k_n^{n(n+1)}, \quad \lim k_n = c$$

und daher gilt

$$2n \sqrt[2n]{\Delta} = 2n\sqrt{m}\sqrt[n]{D} \leqq 2n\sqrt{m}\frac{L}{\sqrt[n]{n!}} k_n^{n+1}$$

im anderen Fall

$$= 2n\frac{\sqrt{m}}{2}\sqrt[n]{D} \leqq n\sqrt{m}\frac{L}{\sqrt[n]{n!}} k_n^{n+1}$$

woraus nach dem Minkowski'schen Satz sofort die Behauptung folgt.

Aus der letzteren Abschätzung können wir noch das folgende Ergebnis entnehmen

Satz 13: Es sei der transfinite Durchmesser c von $C < 1$. Es möge m_n eine Folge von ganzen rationalen quadratfreien Zahlen durchlaufen, so daß $\lim m_n = \infty$ und außerdem

$$m_n = o\left(\left|\frac{1}{k_n}\right|^{2n}\right)$$

wobei die k_n jetzt die Produkte (12) bedeuten mit $\lim_{n\to\infty} k_n = c$. Dann können die Koeffizienten von $p_n(z)$ als ganze Zahlen des Körpers $K(i\sqrt{m_n})$ so gewählt werden, daß $\lim_{n\to\infty} I_n = 0$ ist.

Man kann also die Zahlenmengen, aus denen die Koeffizienten der p_n gewählt werden, immer „weniger dicht" annehmen.

12.

Betrachtet man das Polynom $p_n(x) = ax^n$ ($a>0$; ganz rational) und bildet man

$$I_n = \int_0^1 p_n^2(x)dx = \frac{a^2}{2n+1},$$

so sieht man folgendes: Wenn l_n eine Folge ganzer Zahlen ist, für die $\lim_{n\to\infty} l_n = \infty$ und $l_n = o(\sqrt{n})$ gilt, so gibt es immer l_n Polynome p_n für welche $\lim_{n\to\infty} I_n = 0$, gleichgültig für welches der l_n Polynome p_n man das Integral I_n berechnet. (Man hat nur $a = 1, 2 \ldots l_n$ zu setzen.)

Diese Bemerkung zeigt, daß es sozusagen sehr viele Polynome mit ganzzahligen Koeffizienten gibt, für welche die Integrale I_n beliebig klein werden.

In Verallgemeinerung dessen zeigen wir

Satz 14: Sei C eine Kurve mit dem transfiniten Durchmesser $c < 1$. Dann gibt es zu jeder monoton $\to \infty$ wachsenden Folge ganzer Zahlen l_n für die

$$l_n = o\left(\left|\frac{1}{\sqrt{c}}\right|^n\right)$$

jedenfalls l_n Polynome P_n mit ganzzahligen Koeffizienten (aus $K(i)$) so, daß die Integrale (11) mit wachsendem n beliebig klein werden, gleichgültig welches der l_n Polynome p_n man zu ihrer Bildung verwendet.

Beweis: Nach einem Satz von Blichfeldt kann man zu jeder positiv definiten quadratischen Form

$$f^2 = \sum_{i,k=1}^{n} b_{ik} a_i a_k$$

mit der Diskriminante D k Gitterpunkte des n-dimensionalen Raumes $(a_1^{(i)} \cdots a_n^{(i)})(i = 1, 2, \ldots k)$ finden, so daß gilt

$$f^2(a_1^{(i)} \cdots a_n^{(i)}) \leqq k^2\, n \sqrt[n]{D} \quad i = 1, 2, \ldots k$$

Wenden wir diesen Satz auf die für I_n erhaltene quadratische Form an, so kommen wir genau auf die Behauptung.

Zu den Sätzen 12, 13, 14 ähnliche Sätze könnten auch für die homogenen Polynome aus 8. auf die gleiche Art bewiesen werden.

Anschrift: Prof. Dr. E. Hlawka, Margaretenstraße 27/2/9, 1040 Wien.