

Appendix: Kommentar zu der von Prof. Karl Prachar verfaßten Dissertation „Über die quadratische Abweichung ganzzahliger Polynome von der Null“ (Univ. Wien 1947)

Von

M. Drmota

Die Dissertation von Prof. Prachar behandelt zunächst die Fragestellung, wie klein das Integral

$$\int_a^b p_n(x)^2 dx$$

sein kann, wenn $p_n(x)$ ein ganzzahliges Polynom (ungleich dem Nullpolynom) ist. Es wird gezeigt, daß es im Fall $b - a < 4$ eine Folge von ganzzahligen Polynomen $p_n(x)$ gibt, so daß das obige Integral für $n \rightarrow \infty$ gegen 0 konvergiert. Weiters wird bewiesen, daß es im Fall $b - a \geq 4$ keine solche Folge geben kann.

Prof. Prachar schließt an eine Arbeit von David Hilbert [15] an. Außerdem wird eine Lücke in der Beweisführung von Hilbert geschlossen.

Daraufhin wird dieselbe Problemstellung unter gewissen Einschränkungen für die Koeffizienten von $p_n(x)$ behandelt.

Der eigentliche Hauptteil der Dissertation behandelt analoge Fragestellungen für komplexe Kurvenintegrale über Polynome mit ganzzahligen Koeffizienten und Flächenintegrale über ganzzahlige Polynome in zwei Veränderlichen.

Die von Prof. Prachar behandelte Fragestellung wurde ausgehend von der Arbeit von David Hilbert [15] in der mathematischen Literatur mehrfach aufgegriffen und unter verschiedenen Aspekten behandelt. Um dies zu belegen, habe ich mich bemüht, eine möglichst vollständige Literatur-

liste beizulegen. Die Arbeit von Fekete [13] hat Prof. Prachar übrigens benutzt. Hervorzuheben sind die Reihe von Arbeiten von E. Aparicio Bernardo [2–9], der Artikel von F. Amoroso [1] und das Kapitel von H. L. Montgomery [18], das unter anderem aus nichtpublizierten gemeinsamen Überlegungen von E. Wirsing hervorgegangen ist. Einen sehr schönen Überblick über den Stand der Forschung bis 1993 gibt die Diplomarbeit [11]. Des weiteren gibt es einen engen Zusammenhang von Polynomen mit kleinem Maximum auf einem Intervall I und Polynomen, die alle Nullstellen in I haben [11, 13, 22] und Abschätzungen für die Anzahl von Primzahlen [12, 19, 20].

Diese Ausführungen belegen auch, daß das von Prof. Prachar behandelte Thema immer noch sehr aktuell ist. Gerade in den letzten Jahren ist eine Reihe von Arbeiten darüber erschienen ([1, 9–12, 16–18, 21]). Die Dissertation von Prof. Prachar scheint allerdings unbekannt zu sein. (Sie wird nur in [11] und [12] zitiert.) Die Hilbertsche Problemstellung [15] wurde zwar (ählich wie bei Prachar) mehrfach aufgegriffen und in verschiedene Richtungen hin verallgemeinert, wesentliche Teile der Pracharschen Dissertation wurden aber an keiner mir bekannten Stelle *wiederentdeckt*. Beispielsweise ist die oben erwähnte Eigenschaft, daß bei Intervalllänge $b - a \geq 4$ keine Folge ganzzahliger Polynome $p_n(x)$ existiert, für die das quadratische Mittel gegen 0 konvergiert, und sind die Erweiterungen auf komplexe Kurvenintegrale etc. ausgesprochen interessante jetzt noch weithin unbekannte Ergebnisse.

Es ist der mathematischen Forschung sicherlich dienlich, daß die Pracharschen Resultate einem breiten mathematischen Publikum zugänglich gemacht werden.

Literatur

- [1] F. Amoroso, *Sur le diamètre transfini entier d'un intervalle réel*, Ann. Inst. Fourier **40** (1990), 885–911.
- [2] E. Aparicio Bernardo, *On some properties of polynomials with integer coefficients, and on approximation of functions in the mean by polynomials with integer coefficients*, Izv. Akad. Nauk SSSR, Ser. Mat. **19** (1955), 303–318.
- [3] E. Aparicio Bernardo, *Metodo de las formas lineales para la acotación de las desviaciones mínimas a cero de los polinomios generalizados de coeficientes enteros*, Proc. 1st Conference of Prouegeuse and Spanish Mathematicians (Lisbon, 1972), Inst. ‘Jorge Juan’ Mat., Madrid, 1973, 133–143.
- [4] E. Aparicio Bernardo, *Generalization of a theorem of M. Fekete to polynomials with integer coefficients in several unknowns*, Rev. Mat. Hisp. Amer. **36** (1976), 105–124.
- [5] E. Aparicio Bernardo, *Metodos para el calculo aproximado de la desviacion diofantica uniforme minima e cero en un segmento*, Rev. Mat. Hisp. Amer. **38** (1978), 259–270.
- [6] E. Aparicio Bernardo, *New bounds on the minimal Diophantic deviation from zero on $[0, 1]$ and $[0, 1/4]$* , Actus Sextas. Jour. Mat. Hisp.-Lusitanas (1979), 289–291.

- [7] E. Aparicio Bernardo, *On some systems of algebraic integers of D. S. Gorsbkov and their applications in calculus*, Rev. Mat. Hisp. Amer. **41** (1981), 3–17.
- [8] E. Aparicio Bernardo, *On some results in the problem of Diophantine approximation of functions by polynomials*, Proc. Steklov Inst. Math. **163** (1985), 7–10.
- [9] E. Aparicio Bernardo, *On the asymptotic structure of the polynomials of minimal diophantic deviation from zero*, J. Approx. Theory **55** (1988), 270–278.
- [10] P. Borwein and T. Erdélyi, *The integer Chebyshev problem*, Math. Comput. **65** (1996), 661–681.
- [11] H. Breitenfellner, *Über den maximalen Betrag ganzzahliger Polynome auf gegebenen Intervallen*, Diplomarbeit, TU-Wien, 1993.
- [12] M. Drmota, *Abschätzungen ganzzahliger Polynome auf dem Intervall $[0, 1]$* , Elem. Math. **44** (1989), 57–63.
- [13] M. Fekete, *Über die Verteilung der Wurzeln bei gewissen algebraischen Gleichungen mit ganzzahligen Koeffizienten*, Math. Zeitschrift **17**, 228–249.
- [14] O. Ferguson, *Approximation by polynomials with integral coefficients*, Am. Math. Soc. Providence, 1980.
- [15] D. Hilbert, *Ein Beitrag zur Theorie des Legendreschen Polynoms*, Acta Math. **18** (1894), 155–159.
- [16] B. Kashin, *On algebraic polynomials with integer coefficients with least deviation from zero on an integral*, preprint.
- [17] F. Luquin, *L_p -deviations from zero of polynomials with integral coefficients*, Acta Arith. **59** (1995), 217–228.
- [18] H. L. Montgomery, *Ten lectures on the interface between Analytic Number Theory and Harmonic Analysis*, CBMS, Regional Conference Series in Mathematics **84**, Am. Math. Soc., Providence, 1994.
- [19] M. Nair, *On Chebyshev-type inequalities for primes*, Am. Math. Monthly **89** (1982), 126–129.
- [20] M. Nair, *A new method in elementary prime number theory*, J. London Math. Soc. **25** (1982), 385–391.
- [21] B. Salvy and L. Habsiger, *On integer Chebyshev polynomials*, Math. Comput. **66** (1997), 763–770.
- [22] I. Schur, *Über die Verteilung der Wurzeln bei gewissen algebraischen Gleichungen mit ganzzahligen Koeffizienten*, Springer, Selected Papers II, **32**, 213–238.
- [23] I. Schur, *Über das Maximum des absoluten Betrages eines Polynoms in einem gegebenen Intervalls*, Springer, Selected Papers II, **36**, 259–275.

Anschrift des Verfassers: Michael Drmota, Abt. f. Diskrete Mathematik, TU-Wien, Wiedner Hauptstraße 8–10, A-1040 Wien.