Anzeiger Abt. II (1997) 134: 11–16

Anzeiger
Mathematisch-naturwissenschaftliche Klasse Abt. II
Mathematische, Physikalische und Technische Wissenschaften

Das Gröbnerverfahren für Orthogonalpolynome vom Sobolev-Typ

Von

P. A. Lesky, Stuttgart

(Vorgelegt in der Sitzung der math.-nat. Klasse am 16. Oktober 1997
durch das w. M. Leopold Vietoris)

1. Einleitung

In der Arbeit [6] wurden mit dem Gröbnerverfahren [1] Polynome, die bezüglich des Skalarproduktes

$$\langle f, g\rangle = \int_a^b f(x)\overline{g(x)}dx + \alpha f(a)\overline{g(a)} + \beta f(b)\overline{g(b)} \quad (\alpha, \beta \geqq 0) \tag{1.1}$$

orthogonal sind, bestimmt. Hier soll das Skalarprodukt mit einer *Gewichtsfunktion* $w(x)$ unter *Zulassung einer unendlichen Grenze* (z.B. $a \to -\infty$) in der Form

$$\langle f, g\rangle = \int_a^b w(x)f(x)\overline{g(x)}dx + \alpha w(a)f(a)\overline{g(a)} + \beta w(b)f(b)\overline{g(b)} \tag{1.2}$$

herangezogen werden ($w(x)$ besitze die im folgenden erforderlichen Positivitäts-Konvergenzerzeugungs- und Differenzierbarkeitseigenschaften). Beim Gröbnerverfahren, das auf einem Variationsprinzip beruht, entstehen die Orthogonalpolynome in der Gestalt einer Rodriguesformel. Das Skalarprodukt (1.2) ermöglicht die Konstruktion der Orthogonalpolynome vom *Laguerretyp*, *Legendretyp* und *Jacobityp*, die als Lösungen von Differentialgleichungen vierter Ordnung bekannt sind ([3], [4], [5]), über das Gröbnerverfahren. Damit gelangt man direkt zu den *Rodrigues-formeln* der genannten Polynome.

2. Einbindung der Gewichtsfunktion

Im Sinne von [6] wird unter allen Polynomen n-ten Grades

$$y_n(x) = c_{n,n}x^n + c_{n,n-1}x^{n-1} + \cdots + c_{n,0} \quad (c_{n,k} \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{N}) \tag{2.1}$$

bei fest gehaltenem $c_{n,n}(\neq 0)$ dasjenige ausgesucht, für das $\langle y_n y_n \rangle$ minimal wird. Somit kann das Variationsproblem

$$\langle y_n, y_n \rangle = min! \quad (n \in \mathbb{N}) \tag{2.2}$$

mit der Nebenbedingung

$$y_n^{(n)}(x) = c_{n,n}n! \tag{2.3}$$

zugrundegelegt werden. In üblicher Weise geht man mit einem (beliebig oft differenzierbaren) Lagrangefaktor $\lambda_n(x)$ zum Problem

$$\begin{aligned} &\int_a^b w(x)\left\{y_n^2(x) + 2\lambda_n(x)\left[y_n^{(n)}(x) - c_{n,n}n!\right]\right\}dx+ \\ &\quad + \alpha w(a)y_n^2(a)+\beta w(b)\,y_n^2(b) = stat! \end{aligned} \tag{2.4}$$

über. Die $y_n(x)$ und $\lambda_n(x)$ sind so zu bestimmen, daß für alle n aus $\mathbb{N}$ ein stationärer Wert angenommen wird. Dazu ersetzt man $y_n(x)$ durch "Nachbarfunktionen" $y_n(x)+\varepsilon h_n(x)$ mit beliebig oft differenzierbaren $h_n(x)$ und erhält

$$\begin{aligned} \Omega_n(\varepsilon) = \int_a^b w(x)\big\{&\left[y_n(x) + \varepsilon h_n(x)\right]^2+2\lambda_n(x)\left[y_n^{(n)}(x) + \varepsilon h_n^{(n)}(x)-\right. \\ &\left.- c_{n,n}n!\right]\big\}dx + \alpha w(a)[y_n(a) + \varepsilon h_n(a)]^2+\beta w(b)[y_n(b) + \varepsilon h_n(b)]^2. \end{aligned}$$

Nun nimmt $\Omega_n(\varepsilon)$ genau dann für $\varepsilon = 0$ einen stationären Wert an, wenn die erste Variation $\delta\Omega = \left(\Omega_n'(\varepsilon)\right)_{\varepsilon=0}$ null wird; das führt auf

$$\begin{aligned} &\int_a^b w(x)\left[y_n(x)h_n(x) + \lambda_n(x)h_n^{(n)}(x)\right]dx + \alpha w(a)\,y_n(a)h_n(a)+ \\ &\quad + \beta w(b)y_n(b)h_n(b) = 0. \end{aligned}$$

Durch sukzessive partielle Integration wird die Ausklammerung des $h_n(x)$ im Integranden ermöglicht:

$$\begin{aligned}
&\int_a^b \Big\{ w(x)y_n(x) + (-1)^n [w(x)\lambda_n(x)]^{(n)} \Big\} h_n(x)dx \\
&\quad + \Big\{ w(x)\lambda_n(x)h_n^{n-1}(x) - [w(x)\lambda_n(x)]' h_n^{(n-2)}(x) + \\
&\quad + - \cdots + (-1)^{n-1} [w(x)\lambda_n(x)]^{(n-1)} h_n(x) \Big\}_a^b + \\
&\quad + \alpha w(a)y_n(a)h_n(a) + \beta w(b)y_n(b)h_n(b) = 0.
\end{aligned} \tag{2.5}$$

Beschränkt man sich zunächst auf solche Werte $w(x)h_n(x)$, für die $w(a)h_n(a) = [w(x)h_n(x)]'_{x=a} = \cdots = [w(x)h_n(x)]^{(n-1)}_{x=a} = w(b)h_n(b) = [w(x)h_n(x)]'_{x=b} = \cdots = [w(x)h_n(x)]^{(n-1)}_{x=b} = 0$ ist, dann folgt aus dem Integral von (2.5) nach dem Lemma der Variationsrechung ([2]) die *Rodriguesformel*

$$y_n(x) = \frac{(-1)^{n-1}[w(x)\lambda_n(x)]^{(n)}}{w(x)} \; (w(x) \neq 0, n = 1, 2, 3, \ldots). \tag{2.6}$$

Jetzt geht man analog zu [6] vor und erhält für $\lambda_n(x)$ die Differentialgleichung (2n)-ter Ordnung

$$\left\{ \frac{[w(x)\lambda_n(x)]^{(n)}}{w(x)} \right\}^{(n)} = (-1)^{n-1} c_{n,n}\, n! \tag{2.7}$$

mit den Randbedingungen

$$\begin{aligned}
w(a)\lambda_n(a) = [w(x)\lambda_n(x)]'_{x=a} = \cdots = [w(x)\lambda_n(x)]^{(n-2)}_{x=a} = 0, \\
w(b)\lambda_n(b) = [w(x)\lambda_n(x)]'_{x=b} = \cdots = [w(x)\lambda_n(x)]^{(n-2)}_{x=b} = 0, \\
[w(x)\lambda_n(x)]^{(n-1)}_{x=a} - \alpha [w(x)\lambda_n(x)]^{(n)}_{x=a} = 0, \\
[w(x)\lambda_n(x)]^{(n-1)}_{x=b} + \beta [w(x)\lambda_n(x)]^{(n)}_{x=b} = 0.
\end{aligned} \tag{2.8}$$

Nach Ermittlung der $\lambda_n(x)$ aus dem Randwertproblem (2.7) mit (2.8) ergeben sich die Polynome $y_n(x)$ in der Rodriguesformel (2.6). Daß dabei Orthogonalpolynome $y_n(x)$ im Sinne des Skalarproduktes (1.2) entstehen (im Variationsproblem mit Nebenbedingung wurde nur ein stationärer Wert ermittelt), kann einfach wie in [6] nachgewiesen werden.

3. Die Polynome vom Laguerretyp

Für diese Polynome entnimmt man [5] das Skalarprodukt

$$\langle y_n, y_m \rangle = \int_{-\infty}^{0} e^x y_n(x) y_m(x) dx + \frac{2}{v-2} \quad y_n(0) y_m(0) \tag{3.1}$$

$(v > 2; \alpha = 0; n, m = 0, 1, 2, \ldots)$. Zur Erfüllung von (2.7) macht man den An satz

$$w(x)\lambda_n(x) = (-1)^{n-1} c_{n,n}\, e^x x^{n-1}(x - u_n) \quad (n \in \mathbb{N}). \tag{3.2}$$

Damit ergibt sich auch die Erfüllung aller Randbedingungen (2.8) an der unteren Grenze $(a \to -\infty)$, während an der oberen Grenze $(x = 0)$ alle Randbedingungen bis auf die letzte

$$[w(x)\lambda_n(x)]_{x=0}^{(n-1)} + \frac{2}{v-2} \left[w(x)\lambda_n(x) \right]_{x=0}^{(n)} = 0$$

erfüllt sind. Daraus folgt

$$u_n = \frac{2n}{2n + v - 2} \quad (v \neq 0, -2, -4, \ldots).$$

Somit entsteht nach (2.7) für die Polynome vom *Laguerretyp* die *Rodriguesformel*

$$y_n(x) = c_{n,n} e^{-x} \frac{d^n}{dx^n} \left\{ e^x x^{n-1} \left[x - \frac{2n}{2n + v - 2} \right] \right\} \quad (n = 1, 2, 3, \ldots). \tag{3.3}$$

Diese Rodriguesformel bleibt über die ursprüngliche Voraussetzung $v > 2$ hinaus auch für $v \neq 2, 0, -2, -4, \ldots$ gültig, wobei es aber nicht zur Orthogonalität im positiv definiten Sinn kommen muß ([5]). Die Rodriguesformel stimmt mit der in [3] angegebenen bis auf einen von n abhängenden Faktor überein.

4. Die Polynome vom Legendretyp

Für diese Polynome entnimmt man [5] das Skalarprodukt

$$\frac{t+1}{t} \langle y_n, y_m \rangle = \int_{-1}^{1} y_n(x) y_m(x) dx + \frac{y_n(-1) y_m(-1)}{t} + \frac{y_n(1) y_m(1)}{t} \tag{4.1}$$

$(t > 0; n, m = 0, 1, 2, \ldots)$. Zur Erfüllung von (2.7) macht man den Ansatz

$$\lambda_n(x) = \frac{(-1)^{n-1} n! c_{n,n}}{(2n)!} (x^2 - 1)^{n-1} \left[x^2 - 1 - u_n\right] \quad (n \in \mathbb{N}). \quad (4.2)$$

Damit sind auch die ersten $2n - 2$ Randbedingungen aus (2.8) an beiden Grenzen erfüllt. Aus den beiden letzten Randbedingungen von (2.8) entsteht

$$u_n = \frac{4n}{n(n-1) + 2t} \quad (2t \neq -n(n-1)),$$

so daß sich nach (2.7) für die Polynome vom Legendretyp die Rodriguesformel

$$y_n(x) = \frac{n! c_{n,n}}{(2n)!} \frac{d^n}{dx^n} \left\{ (x^2 - 1) \left[x^2 - 1 - \frac{4n}{n(n-1) + 2t} \right] \right\} \quad (4.3)$$
$$(n = 1, 2, 3, \ldots)$$

ergibt. Die Rodriguesformel bleibt über die ursprüngliche Voraussetzung $t > 0$ hinaus auch für $2t \neq -n(n-1) (n \in \mathbb{N})$ gültig, wobei es aber nicht zur Orthogonalität im positiv definiten Sinn kommen muß ([5]). Die Rodriguesformel stimmt mit der in [3] angegebenen bis auf einen von n abhängenden Faktor überein.

5. Die Polynome vom Jacobityp

Für diese Polynome entnimmt man [5] das Skalarprodukt

$$\langle y_n, y_m \rangle = \int_0^1 (1 - x)^{r-2} y_n(x) y_m(x) dx + \frac{2}{r(f-2)} y_n(0) y_m(0) \quad (5.1)$$

$(r > 1, f > 2; \beta = 0; n, m = 0, 1, 2, \ldots)$. Zur Erfüllung von (2.7) macht man den Ansatz

$$w(x)\lambda_n(x) = -\frac{c_{n,n}}{(n + r - 1)_n} (1 - x)^{n+r-2} x^{n-1} [x + u_n] \quad (n \in \mathbb{N}).$$

Damit sind auch die ersten $2n - 2$ Randbedingungen aus (2.8) an beiden Grenzen erfüllt. Aus den beiden letzten Randbedingungen von (2.8) entsteht

$$u_n = \frac{2n}{2n(n + r - 2) + r(f - 2)} \quad (2n(n + r - 2) + r(f - 2) \neq 0),$$

so daß sich nach (2.7) für die Polynome vom *Jacobityp* die *Rodriguesformel*

$$y_n(x) = \frac{(-1)^n c_{n,n}(1-x)^{2-r}}{(n+r-1)_n} \frac{d^n}{dx^n} \Bigg\{ (1-x)^{n+r-2} \\ x^{n-1} \left[x + \frac{2n}{2n(n+r-2)+r(f-2)} \right] \Bigg\} \tag{5.2}$$

$(n = 1, 2, 3, \ldots)$ ergibt. Die Rodriguesformel bleibt über die ursprünglichen Voraussetzungen $r > 1$ and $f > 2$ hinaus auch für $2n(n+r-2) + r(f-2) \neq 0 (n \in \mathbb{N})$ gültig, wobei es aber nicht zur Orthogonalität im positiv definiten Sinn kommen muß ([5]). Die Rodriguesformel stimmt mit der in [3] angegebenen bis auf einen von n abhängenden Faktor überein.

Literatur

[1] Gröbner, W.: Über die Konstruktion orthogonaler Polynome in ein- und zweidimensionalen Bereichen, Mh. Math. 52 (1948), 38–54
[2] Gröbner, W., Lesky, P.: Mathematische Methoden der Physik I, BI 89, Mannheim 1964
[3] Krall, A. M.: Orthogonal polynomials satisfying fourth order differential equations, Proc. Roy. Soc. Edinb. Sec. A, 87 (1981), 271–288
[4] Krall, H. L.: On Orthogonal Polynomials Satisfying a Certain Fourth Order Differential Equation, The Pens. State Coll. Bull. 34 (1940), 3–24
[5] Lesky, P. A.: Eigenwertprobleme mit Differentialgleichungen vierter Ordnung für die Orthogonalpolynome vom Laguerretyp, Legendretyp und Jacobityp, eingereicht
[6] Lesky, P. A., Sonderegger, H.: Orthogonalpolynome, die auf einem Intervall im Mittel und in den Randpunkten exakt approximieren, Sb. Öst. Ak. Wiss., math. nat. Kl. 206 (1997), 3–14

Anschrift des Verfassers: Univ.-Prof. Dr. Peter A. Lesky, Pfaffenwaldring 57, D-70569 Stuttgart, Bundesrepublik Deutschland.