Sitzungsber. Abt. II (1997) 206: 47–116

Sitzungsberichte
Mathematisch-naturwissenschaftliche Klasse Abt. II
Mathematische, Physikalische und Technische Wissenschaften

Über einen Satz von Krasner – 2. Teil

Von

A. Schleiermacher

(Vorgelegt in der Sitzung der math.-nat. Klasse am 23. Jänner 1997
durch das w. M. Ludwig Reich)

Inhalt

Kapitel III. Die Theorie der Strukturen von Sebastião e Silva

1. Einführung

In Kapitel III betrachten wir Strukturen im Sinne von Sebastião e Silva, die im Gegensatz zu den zuvor betrachteten endlichen und Krasnerschen Strukturen mehrstufig aufgebaut sind. José Sebastião e Silva wählte für seine Form der Theorie der Strukturen ([21], [22]) den Ausgangspunkt in der Typentheorie von Bertrand Russell (z.B. [19]). In Abwandlung der Russelschen Ideen werden in dieser Theorie ausgehend von einer Menge von Grundelementen in hierarchischem Aufbau Elemente höherer Stufen konstruiert, die nun ihrerseits nichts anderes sind als Relationen über Mengen von Elementen bereits konstruierter Stufen. Anders als bei Sebastião e Silva kommen aber in dieser Arbeit nur endliche Stufen in Betracht[1].

Wie in den beiden vorigen Kapiteln sei A eine Menge von Elementen, der wir durch Relationen eine Struktur aufprägen wollen. Im Unterschied zu Kapitel II wollen wir in diesem Kapitel nur noch Relationen endlicher Stellenzahl betrachten. Wir gehen also in dieser Hinsicht wieder einen Schritt zurück dafür aber in einer ganz anderen Hinsicht einen Schritt weiter. Wir fassen nun nicht mehr nur Relationen über der Menge A ins Auge sondern, aufbauend auf diesen, neue Relationen über der Vereinigung von A mit der Menge $R_1(A)$ aller über A definierten Relationen. Die gewöhnlichen Relationen der Menge $R_1(A)$ sind Relationen der Stufe eins. Die über $A \cup R_1(A)$ gebildeten Relationen haben die Stufe 2 und bilden eine neue Menge $R_2(A)$. Über der Menge $A \cup R_1(A) \cup R_2(A)$ können wir nun Relationen der Stufe 3 bilden usw.

Der skizzierte Aufbau von Relationen beliebiger endlicher Stufen verlangt noch eine genauere Darstellung. Die Relationen der Stufe 0 sind die Elemente der Menge A. Wir bezeichnen sie mit kleinen lateinischen Buchstaben a, b usw. Relationen höherer oder auch unbestimmter Stufen bezeichnen wir mit kleinen griechischen Buchstaben ρ, σ usw. Der Redeweise entsprechend, daß die Elemente von A auch Relationen der Stufe 0 genannt werden, vereinbaren wir auch per Konvention die Bezeichnung $R_0(A) = A$. Die Relationen der Stufe eins sind die gewöhnlichen Relationen, wie wir sie in Kapitel I betrachtet haben.

---

[1] Zu den Auswirkungen dieser Einschränkung vergleiche Anmerkung 6. Die im nächsten Absatz erwähnte Einschränkung auf Relationen endlicher Stellenzahl wird bei Sebastião e Silva nicht streng eingehalten sondern gelegentlich durchbrochen. Jedoch hat das keine tieferen Auswirkungen auf die Theorie.

Nehmen wir nun an, bis zu einer gewissen Stufe $p-1$ seien alle Relationen bereits definiert und die Menge der Relationen der Stufe $i\,(0 \le i \le p-1)$ sei mit $R_i(A)$ bezeichnet. Unter einem Argumenttyp verstehen wir ein endliches Zahlentupel der Form $(n_1, n_2, \ldots, n_s)$, wobei $n_i \ge 0$ für $i = 1, 2, \ldots, s$. Es sei $p - 1 = \max(n_1, n_2, \ldots, n_s)$.

Eine Relation ρ der Stufe p und des Argumenttyps $(n_1, n_2, \ldots, n_s)$ ist gegeben durch eine Aussageform $\rho(U_1, U_2, \ldots, U_s)$, wobei $U_1, U_2, \ldots, U_s$ Variable sind, die Werte in $R_{n_1}(A), R_{n_2}(A), \ldots, R_{n_s}(A)$ annehmen können. Wenn für ein Tupel $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_s$ mit $\alpha_i \in R_{n_i}(A)$ die Relation ρ erfüllt ist, so schreiben wir wie bisher

$$\vdash\ \rho(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_s) \text{ und andernfalls } \quad \dashv \quad \rho(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_s).$$

Relationen vom gleichen Argumenttyp sollen nicht unterschieden werden, soweit sie die gleichen Lösungen haben[2]. Jedoch betrachten wir die leeren Relationen der verschiedenen Argumenttypen als untereinander verschieden.

Die Menge A heißt bei Sebastião e Silva Fundament[3]. Ist g eine Abbildung des Fundaments in sich, so definiert man die Wirkung von g auf der Menge $R_1(A)$ auf dieselbe Weise, wie wir es bisher gemacht haben. Diese Definition wird dann induktiv auf Relationen beliebiger Stufen fortgesetzt.

2. Logikkalkül mit Prädikaten beliebiger Stufen

Wir wollen nun wie in Kapitel I den Aufbau eines Logikkalküls ins Auge fassen, der uns dazu dienen soll, zu beschreiben, welche Relationen aus anderen mit „logischen Mitteln“ abgeleitet werden können. Da wir nicht nur gewöhnliche Relationen betrachten wollen wie im ersten Teil, liegt es auf der Hand, daß in unserem Kalkül auch Prädikate höherer Stufen vorkommen müssen. Dementsprechend werden wir auch Variablen höherer Stufen benötigen, die als Prädikate fungieren und als Relationen der entsprechenden Stufe interpretiert werden können. Die Variablen werden demnach in diesem Kalkül von vorneherein etwas komplizierteres sein als in dem einfachen Kalkül des Kapitels I, und wir müssen mehr Sorgfalt darauf verwenden, ihre Rolle zu beschreiben.

Wir ordnen jeder Variablen X eine Stufe $p(X)$ zu. Hat X die Stufe $p(X)$, so soll es möglich sein für X ein beliebiges Element ξ einzusetzen,

---

[2] In dieser Arbeit wird angenommen, daß es zu jeder Untermenge U des cartesischen Produkts $R_{n_1}(A) \times R_{n_2}(A) \times \ldots \times R_{n_5}(A)$ eine Relation gibt, die genau die Tupel $(\alpha_1, \alpha_2 \ldots, \alpha_s)$ aus U als Lösungen zuläßt.

[3] Wörtlich heißt es bei Sebastião e Silva "conjunto fundamental".

wenn ξ ein Element der Stufe $p(X)$ ist[4]. Sind X und $X_1, X_2, \ldots, X_n$ Variable, so können wir versuchsweise einen Ausdruck der Form $X(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ bilden und uns nach dessen Sinn fragen. Setzt man für X und $X_1, X_2, \ldots, X_n$ Relationen passender Stufe ein, so entsteht nur in solchen Fällen ein sinnvoller Ausdruck der Form $\rho(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$, wo ρ gerade die Stellenzahl n und den zu $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ passenden Argumenttyp hat.

Damit durch solche Einsetzungen keine unsinnigen Ausdrücke entstehen können, müssen wir noch jeder Variablen, die wie X an der Stelle eines Prädikats verwendet wird, einen bestimmen Argumenttyp zuordnen und verlangen, daß bei der Bildung von Ausdrücken der Form $X(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ und bei Einsetzungen nicht nur die Stufe sondern auch der Argumenttyp berücksichtigt werden. Die Variablen der ersten Art, die nur an eine feste Stufe gebunden sind, nennen wir Individuenvariable. Die Variablen der zweiten Art, die nicht nur eine feste Stufe sondern auch einen Argumenttyp mit sich führen, wollen wir Prädikatvariable nennen.

Es sei nun R eine endliche oder unendliche Menge von vorgegebenen Relationen. In der Menge R sollen auch Relationen der Stufe 0, also Elemente von A, nicht ausgeschlossen sein. Es ist unser Ziel einen Logikkalkül $L(R)$ zu definieren mit der folgenden Eigenschaft:

Für jede Formel in unserem Kalkül gibt es nach bestimmten noch aufzustellenden Regeln bei Festlegung einer Reihenfolge für die in ihr vorkommenden freien Variablen eine eindeutige Interpretation als Relation einer jeweils wohldefinierten Stufe über A.

Es sei V_1 ein für jede Stufe und jeden Argumenttyp abzählbar unendlicher Vorrat an Prädikatvariablen $X, Y, \ldots$. Ferner sei V_2 ein für jede Stufe abzählbar unendlicher Vorrat an Individuenvariablen $U, V, \ldots$. Zu jedem Element $\rho \in R$ gibt es ein entsprechendes Symbol im Alphabeth des Kalküls $L(R)$. Die Elemente der Menge R gehören, soweit sie eine Stufe > 0 haben, zu den primitiven Bausteinen der Formeln. Alle

[4] Dies entspricht den Konventionen beim Aufbau der Relationen höherer Stufen, wo die Entscheidung getroffen wurde, daß die Argumente einer Relation höherer Stufe an vorgegebener Stelle stets eine feste Stufe haben sollen.

Es wäre auch ein Aufbau möglich, wo man überall, wo Argumente der Stufe p zulässig sind, auch Argumente aller Stufen $\leq p$ zulassen würde. Ein solcher Aufbau hätte den Vorteil, daß dann auch nach demselben Schema Relationen für die der ersten Limeszahl ω entsprechende Stufe und für beliebige weitere Stufen konstruiert werden könnten. Jedoch würden dann an einigen Stellen die Beweise durch gewisse technische Komplikationen umständlicher. Deswegen haben wir auf die Betrachtung von Relationen mit "gemischten Argumenten" dieser Art verzichtet.

Elemente von R können als konstante Terme in den Argumenten der Formelbausteine auftreten.

Wir geben nun die Definition der Terme und der wohlgeformten Ausdrücke (Formeln) unseres Kalküls und definieren dabei zugleich, welche die in einer Formel vorkommenden freien Variablen sind. Anschließend werden wir dann die Regeln für die Interpretation der Formeln als Relationen aufstellen.

Für die Definition der Terme genügt eine einzige Regel:

(T1) Jede Variable der Stufe p ist ein Term der Stufe p; jede Konstante der Stufe p ist ein Term der Stufe p.

Regeln für den Formelaufbau des Kalküls $\mathbf{L}(\boldsymbol{R})$

(F1) Sind t_1 und t_2 Terme, so ist $t_1 = t_2$ eine Formel.

(F2) Ist X eine Prädikatvariable des Typs $(n_1, n_2, \ldots, n_s)$, und sind $t_1, t_2, \ldots, t_s$ beliebige Terme der Stufen $n_1, n_2, \ldots, n_s$, so ist $X(t_1, t_2, \ldots, t_s)$ eine Formel.

(F3) Für jede Relation φ eines Typs $(n_1, n_2, \ldots, n_s)$ aus der Menge R und für irgendwelche Terme $t_1, t_2, \ldots, t_s$ der Stufen $n_1, n_2, \ldots, n_s$ ist $\varphi(t_1, t_2, \ldots, t_s)$ eine Formel.

Formeln, die nach den Regeln (F1)–(F3) gebildet sind, werden Primformeln genannt.

Die freien Variablen in einer Formel $X = Y$ sind X und Y.

Sei t ein konstanter Term. Eine Formel $X = t$ oder $t = X$ enthält X als einzige freie Variable.

Seien t_1 und t_2 konstante Terme. Die Formel $t_1 = t_2$ enthält keine freie Variable.

Seien $t_1, t_2, \ldots, t_s$ Terme, von denen $t_{i_1}, t_{i_2}, \ldots, t_{i_k}$ identisch mit den Variablen $X_{i_1}, X_{i_2}, \ldots, X_{i_k}$ seien. Die restlichen seien konstant.

Die freien Variablen in einer Formel $X(t_1, t_2, \ldots, t_s)$ sind dann X und $X_{i_1}, X_{i_2}, \ldots, X_{i_k}$.

Die freien Variablen in einer Formel $\varphi(t_1, t_2, \ldots, t_s)$ sind dann $X_{i_1}, X_{i_2}, \ldots, X_{i_k}$.

F4) Ist Φ eine Formel, so ist auch (Φ) eine Formel.

F5) Sind Φ_1 und Φ_2 Formeln, so ist auch $\Phi_1 \wedge \Phi_2$ eine Formel.

F6) Ist Φ eine Primformel oder eine Formel der Gestalt (Ψ), so ist auch $\neg\Phi$ eine Formel. Die freien Variablen einer Formel (Φ) oder einer Formel $\neg\Phi$ sind dieselben wie die der Formel Φ. Die freien Variablen einer Formel $\Phi_1 \wedge \Phi_2$ sind diejenigen Variablen, die in Φ_1 oder in Φ_2 frei vorkommen.

F7) Ist Φ eine Primformel oder eine Formel der Gestalt (Ψ), und ist X eine beliebige Variable, so ist $(\exists X)\Phi$ eine Formel.

Die freien Variablen einer Formel $(\exists X)\Phi$ sind die freien Variablen von Φ abzüglich der Variablen X.

Zur einfacheren Darstellung der Formeln werden wir gemäß den üblichen Konventionen noch weitere nicht zum Alphabeth des Kalküls gehörende Zeichen verwenden, und zwar hauptsächlich die folgenden: $\forall$ (für alle), $\vee$ (nicht ausschließendes oder), $\rightarrow$ (Implikation), $\equiv$ (Äquivalenz)[5].

Interpretation der Formeln des Kalküls $\mathbf{L}(\boldsymbol{R})$ als Relationen

Es ist nun noch notwendig, sich über die Interpretation der Formeln als Relationen klarzuwerden. Die Interpretation wirft, abgesehen von der Bestimmung des Typs und der Stufe der zu einer Formel gehörenden Relationen, keine anderen Probleme auf als die Interpretation der Formeln des in Kapitel I verwendeten Prädikatenkalküls erster Stufe. Trotzdem wollen wir hier etwas pedantisch vorgehen und die Interpretation Schritt für Schritt parallel mit dem Formelaufbau definieren. Dazu ist als erstes eine Erweiterung des Kalküls um weitere Konstante notwendig. Jedes Element einer der Mengen $A = R_0(A), R_1(A), R_2(A), \ldots$ soll nun durch eine entsprechende Konstante des erweiterten Kalküls $L^*(R)$ repräsentiert sein. Die Bildungsregeln für den erweiterten Kalkül $L^*(R)$ sind dieselben wie die des Kalküls $L(R)$.

Sind $X_1, X_2, \ldots, X_n$ Variable und $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n$ Konstante, so lassen wir eine Substitution $X_1 \rightarrow \varphi_1, X_2 \rightarrow \varphi_2, \ldots, X_n \rightarrow \varphi_n$ zu, wenn für $i = 1, 2, \ldots, n$ folgende beide Bedingungen erfüllt sind:
S1) die Stufe von φ_i ist gleich der Stufe von X_i,
S2) ist X_i eine Prädikatvariable, so stimmen die Typen von X_i und φ_i überein.

Die folgenden Regeln I1)–I7) bestimmen die Interpretation von Formeln bei zulässigen Substitutionen und bilden die Grundlage für die Interpretation beliebiger Formeln.

---

[5] An dieser Stelle sind noch einige weitere übliche Konventionen zu erwähnen: $(\exists X_1, X_2, \ldots, X_n)(\Phi)$ steht als Abkürzung für $(\exists X_1)((\exists X_2)\cdots(\exists X_n)(\Phi)\cdots)$ und eine entsprechende Konvention gilt auch für den Quantor $\forall$.

Statt runder Klammerpaare $(\cdots)$ verwenden wir der Übersichtlichkeit halber auch Paare eckiger Klammern $[\cdots]$, wenn dadurch eine Häufung von Klammern gleichen Aussehens vermieden werden kann.

Wenn Klammern zwar nach den Regeln des Kalküls notwendig wären, zur Verdeutlichung des Wirkungsbereichs von Quantoren oder logischer Operatoren jedoch nicht benötigt werden, so lassen wir sie weg. Dies gilt insbesondere für Formeln, in denen syntaktische Variable für Formelteile vorkommen: wir schreiben also zum Beispiel $(\exists X)\Phi$ an Stelle von $(\exists X)(\Phi)$ und $\neg\Phi$ an Stelle von $\neg(\Phi)$ usw.

(I1) Ist Φ eine Primformel der Gestalt $X = Y$, so entsteht durch eine zulässige Substitution $X \to \varphi$, $Y \to \psi$ die Aussage $\varphi = \psi$. Die Aussage $\varphi = \psi$ ist wahr, wenn φ und ψ gleich sind. Ist Φ eine Primformel der Gestalt $X = X$, so entsteht durch eine zulässige Substitution $X \to \varphi$ die Aussage $\varphi = \varphi$, die stets wahr ist. Ist Φ eine Primformel der Gestalt $X = \psi$ oder $\psi = X$, so entsteht durch eine zulässige Substitution $X \to \varphi$ die Aussage $\varphi = \psi$ bzw. $\psi = \varphi$. Die entstandene Aussage ist wahr, wenn φ und ψ gleich sind.

Seien $t_1, t_2, \ldots, t_s$ Terme, von denen $t_{i_1}, t_{i_2}, \ldots, t_{i_k}$ identisch mit den Variablen $X_{i_1}, X_{i_2}, \ldots, X_{i_k}$ seien. Die restlichen seien konstant und gleich $\varphi_{j_1}, \ldots \varphi_{j_s}$.

(I2) Ist Φ eine Primformel der Gestalt $X(t_1, t_2, \ldots, t_s)$, so entsteht durch eine zulässige Substitution $X \to \varphi$, $X_{i_1} \to \varphi_{i_1}$, $X_{i_2} \to \varphi_{i_2}, \ldots,$ $X_{i_k} \to \varphi_{i_k}$ die Aussage $\varphi(\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_s)$. Sie ist wahr, wenn

$$\vdash \varphi(\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_s), \text{ andernfalls nicht wahr.}$$

(I3) Ist Φ eine Primformel der Gestalt $\varphi(t_1, t_2, \ldots, t_s)$, so entsteht durch eine zulässige Substitution $X_{i_1} \to \varphi_{i_1}, X_{i_2} \to \varphi_{i_2}, \ldots, X_{i_k} \to \varphi_{i_k}$ die Aussage $\varphi(\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_s)$. Sie ist wahr, wenn

$$\vdash \varphi(\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_s), \text{ andernfalls nicht wahr.}$$

(I4) Ist Φ eine Formel der Gestalt (Ψ) in den freien Variablen $X_1, X_2, \ldots, X_n$, so entsteht durch die zulässige Substitution $X_1 \to \varphi_1$, $X_2 \to \varphi_2, \ldots, X_n \to \varphi_n$ aus Ψ eine Aussage Ψ^* und aus Φ die Aussage (Ψ^*). Die Aussage (Ψ^*) ist genau dann wahr, wenn Ψ^* wahr ist.

(I5) Ist Φ eine Formel der Gestalt $\Phi_1 \wedge \Phi_2$ in den freien Variablen $X_1, X_2, \ldots, X_n$, so entstehen durch eine zulässige Substitution $X_1 \to \varphi_1, X_2 \to \varphi_2, \ldots, X_n \to \varphi_n$ aus Φ_1 und Φ_2 die Aussagen Φ_1^* und Φ_2^*, und es entsteht aus Φ die Aussage $\Phi_1^* \wedge \Phi_2^*$. Sie ist genau dann wahr, wenn Φ_1^* und Φ_2^* beide wahr sind.

(I6) Ist Φ eine Formel der Gestalt $\neg\Psi$ in den freien Variablen $X_1, X_2, \ldots, X_n$, so entsteht durch eine zulässige Substitution $X_1 \to \varphi_1, X_2 \to \varphi_2, \ldots, X_n \to \varphi_n$ aus Ψ die Aussage Ψ^* und aus Φ die Aussage $\neg\Psi^*$. Die Aussage $\neg\Psi^*$ ist wahr, wenn Ψ^* nicht wahr ist, und nicht wahr, wenn Ψ^* wahr ist.

(I7) Ist Φ eine Formel der Gestalt $(\exists X)\,\Psi$ in den freien Variablen $X_1, X_2, \ldots, X_n$, so entsteht durch eine zulässige Substitution $X_1 \to \varphi_1$, $X_2 \to \varphi_2, \ldots, X_n \to \varphi_n$ aus Ψ eine Formel Ψ^*, die noch die freie Variable X enthalten kann, und aus Φ entsteht die Aussage $(\exists X)\,\Psi^*$. Wenn Ψ^* die freie Variable X nicht enthält, so ist Ψ^* eine Aussage, und die Aussage $(\exists X)\,\Psi^*$ ist wahr, wenn Ψ^* wahr ist, und nur dann. Wenn dagegen Ψ^*

noch von der freien Variablen X abhängt, so ist die Aussage $(\exists X)\ \Psi^*$ genau dann wahr, wenn es eine zulässige Substitution $X \to \varphi$ gibt, so daß die durch diese Substitution aus Ψ^* entstehende Aussage wahr ist.

Zum Verständnis dieser Regeln sei noch angemerkt, daß sie nicht nur definieren, wie der Wahrheitswert von Aussagen gefunden wird, sondern auch, welche neue Aussage oder Formel durch eine beliebige zulässige Substitution aus einer Formel entsteht.

Nun können wir auch die Interpretation einer beliebigen Formel Φ des Kalküls $L(R)$ als Relation festlegen. Seien $X_1, X_2, \ldots, X_n$ die in Φ vorkommenden freien Variablen in fest vorgegebener Reihenfolge. Für die Aussage, die aus Φ als Ergebnis einer zulässigen Substitution $X_1 \to \varphi_1, X_2 \to \varphi_2, \ldots, X_n \to \varphi_n$ entsteht, schreiben wir

$$\Phi|_{X_1\to\varphi_1,\, X_2\to\varphi_2,\ldots,X_n\to\varphi_n}$$

Die Relation, als die bei der gegebenen Reihenfolge der Variablen die Formel Φ interpretiert wird, bezeichnen wir wie in Kapitel I durch

$$\Phi|_{X_1,X_2,\ldots,X_n}$$

Sie ist durch folgende Äquivalenz definiert:

$$\vdash\ \Phi|_{X_1,X_2,\ldots,X_n}(\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n) \text{ dann und nur dann,}$$

wenn die Aussage $\Phi|_{X_1\to\varphi_1,\, X_2\to\varphi_2,\ldots,\, X_n\to\varphi_n}$ wahr ist.

3. Operationen auf Relationen

Im ersten Kapitel war der Ansatz verfolgt worden, die ableitbaren Relationen durch logische Ausdrücke aus den vorgegebenen Relationen zu bilden. Dagegen bestand der im zweiten Kapitel dargestellte Krasnersche Ansatz darin, die abgeleiteten Relationen durch gewisse einfache Operationen aus den vorgegebenen Relationen zu bilden. Hier wollen wir nun beide Methoden wieder aufgreifen und zeigen, daß sie einerseits gleichwertig sind aber andererseits beide in unserer neuen Situation nicht ganz ausreichen.

Bei den im folgenden zu definierenden elementaren Operationen auf Relationen werden die folgenden gedanklichen Operationen eine Rolle spielen.

1) Erkennen von Gleichheit.
2) Erkennen der Gültigkeit einer Relation φ für ein Tupel $\varphi_1, \ldots, \varphi_s$.
3) Erkennen der Stufe einer Relation oder eines Tupels.
4) Umstellung von Tupeln mittels Permutationen.
5) Negation von Aussagen.

6) Und-Verknüpfung von Aussagen.
7) Komposition von Tupeln $(\alpha_1, \ldots, \alpha_s)$ und $(\beta_1, \ldots, \beta_t)$ zu einem neuen Tupel $(\alpha_1, \ldots, \alpha_s, \beta_1, \ldots, \beta_t)$.
8) Existenzaussagen wie "Es gibt α derart, daß …".

Heben der Stufe

Sei ρ eine beliebige Relation der Stufe p, die auch Null sein kann. Dann bezeichnet $\rho^{\uparrow}$ die Relation der Stufe $p+1$ mit der einzigen Lösung ρ.

$$\vdash \ \rho^{\uparrow}(\rho) \text{ und aus } \quad \vdash \ \rho^{\uparrow}(\sigma) \text{ folgt die Identität von } \rho \text{ und } \sigma.$$

Senken der Stufe

Sei ρ eine beliebige Relation der Stufe $p > 0$, die genau eine Lösung hat. Dann bezeichnet $\rho^{\downarrow}$ diese eindeutig bestimmte Lösung, d.h. die Relation der Stufe $p-1$ mit der Eigenschaft

$$\vdash \ \rho(\rho^{\downarrow}).$$

Diese Operation ist zur vorigen invers, d.h. ρ ist identisch mit $\rho^{\uparrow\downarrow}$.

Komplement

Für eine beliebige Relation ρ der Stellenzahl s und des Typs t bezeichne $\rho^{\sim}$ die Relation mit der Definition

$$\vdash \ \rho^{\sim}(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_s) \text{ dann und nur dann, wenn}$$

das Tupel $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_s)$ den Typ t hat und wenn $\dashv \ \rho\,(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_s)$.

Durchschnitt und Vereinigung

Seien ρ_1 und ρ_2 Relationen vom selben Typ. Dann bezeichnet $\rho_1 \cap \rho_2$ die Relation mit der Definition

$$\vdash \ \rho_1 \cap \rho_2\,(\alpha_1, \ldots, \alpha_s) \text{ dann und nur dann, wenn}$$
$$\vdash \ \rho_1(\alpha_1, \ldots, \alpha_s) \text{ und } \quad \vdash \ \rho_2(\alpha_1, \ldots, \alpha_s).$$

$\rho_1 \cup \rho_2$ bezeichnet die Relation $(\rho_1^{\sim} \cap \rho_2^{\sim})^{\sim}$.

Transformierte bezüglich einer Permutation $\boldsymbol{\lambda}$

Sei ρ eine Relation der Stellenzahl s und λ eine Permutation der Menge $\{1, 2, \ldots, s\}$. Dann bezeichnet $\rho\lambda$ die Relation mit der Definition

$$\vdash \rho\lambda(\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_s) \text{ dann und nur dann, wenn}$$
$$\vdash \rho(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_s) \text{ und } \beta_1 = \alpha_{\lambda(1)}, \beta_2 = \alpha_{\lambda(2)}, \ldots, \beta_s = \alpha_{\lambda(s)}.$$

Projektion

Sei ρ eine Relation der Stellenzahl $s > 1$. Dann bezeichnet ρ_{s-1} die Relation der Stellenzahl $s-1$ mit der Definition

$$\vdash \rho^{s-1}(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{s-1}) \text{ dann und nur dann,}$$

wenn es ein Element α_s gibt, so daß $\vdash \rho(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{s-1}, \alpha_s)$.

Erweiterung

Sei ρ eine Relation der Stellenzahl $s - 1 > 0$. Dann bezeichnet $\rho^{s,p}$ die Relation der Stellenzahl s und der Stufe $\max(p(\rho), p+1)$ mit der Definition

$$\vdash \rho^{s,p}(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{s-1}, \alpha_s) \text{ dann und nur dann, wenn}$$
$$\vdash \rho(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{s-1}) \text{ und die Stufe von } \alpha_s \text{ gleich } p \text{ ist.}$$

Ist $M = \{i_1, i_2, \ldots, i_r\}$ eine Untermenge der Menge $\{1, 2, \ldots, s\}$, so kann man auch eine Projektion einer beliebigen s-stelligen Relation ρ in eine r-stellige ρ_M definieren, wo nur die Argumentpositionen $i_1, i_2, \ldots, i_r$ berücksichtigt sind:

$$\vdash \rho_M(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_r), \text{ dann und nur dann, wenn es Elemente}$$
$$\beta_1, \ldots, \beta_s \text{ gibt, so daß}$$
$$\vdash \rho(\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_s) \text{ und } \alpha_1 = \beta_{i_1}, \alpha_2 = \beta_{i_2}, \ldots, \alpha_r = \beta_{i_r}.$$

Diese Projektion läßt sich durch Transformation mit einer geeigneten Permutation und wiederholte einfache Projektion zusammensetzen. Dabei hat man nur dafür zu sorgen, daß $\lambda(i_1) = 1$, $\lambda(i_2) = 2, \ldots,$ $\lambda(i_r) = r$. Dann ergibt sich $\rho_M = \rho\lambda_{s-1, s-2, \ldots, s-(s-r)}$.

In ähnlicher Weise lassen sich auch mehrfache Erweiterungen definieren und aus den gegebenen Operationen erzeugen.

Quasi-Diagonale

Sei λ eine Permutation der Menge $\{1, 2, \dots, s\}$. Dann bezeichnet λ^* die s-stellige Relation mit der Eigenschaft

$$\vdash \lambda^*(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s) \text{ dann und nur dann, wenn}$$
$$\alpha_1 = \alpha_{\lambda(1)}, \alpha_2 = \alpha_{\lambda(2)}, \dots, \alpha_s = \alpha_{\lambda(s)}.$$

Die Relation λ^* heißt Quasi-Diagonale bezüglich λ. Man kann sich die Quasi-Diagonalen auch durch die logische Operation der Gleichsetzung von Komponenten entstanden denken. Wir bezeichnen im folgenden die Menge aller Quasi-Diagonalen mit Δ.

Metarelationen

Für jede Stellenzahl $s > 0$ und für jeden Argumenttyp $t = (n_1, n_2, \dots, n_s)$ betrachten wir die $s + 1$-stellige Relation μ_t mit der Definition

$$\vdash \ \mu_t(\chi, \chi_1, \dots, \chi_s) \text{ dann und nur dann, wenn}$$
$$\vdash \ \chi(\chi_1, \dots, \chi_s).$$

μ_t hat die Stufe $p + 1$ und den Argumenttyp $(p, n_1, \dots, n_s)$, wobei $p - 1 = \max(n_1, n_2, \dots, n_s)$. Wir nennen μ_t die Metarelation zum Typ t. Für die Metarelationen gibt es in den zuvor betrachteten einstufigen Strukturen keine Entsprechung. Wir bezeichnen im folgenden die Menge aller Metarelationen mit M.

Satz 1. Sei R eine Menge von Relationen und sei $E(R)$ die kleinste gegenüber allen elementaren Operationen abgeschlossene Menge von Relationen, die R sowie alle Quasidiagonalen und alle Metarelationen enthält.

a) Eine Relation φ der Stufe > 0 gehört genau dann zu $E(R)$, wenn es im Kalkül $L(R)$ eine Formel Φ gibt, so daß $\varphi := \Phi|_{X_1, X_2, \dots, X_s}$.
b) Ein Element c der Stufe 0 gehört genau dann zu $E(R)$, wenn $c^\uparrow$ zu $E(R)$ gehört.

Beweis: a) Sei $\varphi \in E(R)$. Wir müssen beweisen, daß φ durch eine Formel des Kalküls $L(R)$ dargestellt werden kann.

Für die Relationen aus R gilt das nach Definition der Kalküls $L(R)$. Für Quasi-Diagonalen können wir Formeln der Art

$$(X_1 = X_1 \wedge X_2 = X_2 \wedge \cdots \wedge X_s = X_s) \wedge (X_{i_1} = X_{j_1} \wedge X_{i_2} = X_{j_2} \cdots)$$

angeben.

Metarelationen werden durch Formeln der Art $X(X_1, X_2, \dots, X_s)$ definiert.

Sei nun φ eine Relation der Stellenzahl s und des Typs $t = (n_1, n_2, \dots, n_s)$, von der die Behauptung bewiesen ist. D.h. es gelte $\varphi := \Phi|_{X_1,X_2,\dots,X_s}$
für eine gewisse Formel Φ des Kalküls $L(R)$.

Es ist zu beweisen, daß dann auch die Relationen durch Formeln darstellbar sind, die aus φ durch Anwendung einer der oben definierten unären Operationen entstehen. Wir können dabei annehmen, daß die Variablen $X_1, X_2, \dots, X_s$ respektive die Stufen $n_1, n_2, \dots, n_s$ haben.

Die Relation $\varphi^{\uparrow}$ wird dann dargestellt durch die Formel

$$(\forall X_1, X_2, \dots, X_s)[X(X_1, X_2, \dots, X_s) \equiv \Phi].$$

Die Relation $\varphi^{\downarrow}$ kann nur existieren, wenn $s = 1$. D.h. es gilt $\varphi := \Phi|_{X_1}$ in diesem Fall.

Wir können annehmen, daß X_1 eine Prädikatvariable des zu $\varphi^{\downarrow}$ passenden Typs ist. Denn eine andere Prädikatvariable kann X_1 nach den Regeln von §2 nicht sein, und wenn X_1 eine Individuenvariable ist, so können wir zu einer äquivalenten Formel $(\exists X_1)[\Phi \wedge X_1 = Y]$ übergehen, wo Y die gewünschte Eigenschaft hat. Sei nun die Stufe von $\varphi^{\downarrow}$ größer als Null und seien $U_1, U_2, \dots, U_r$ zu den Argumenten von $\varphi^{\downarrow}$ passende Variable. Die Relation $\varphi^{\downarrow}$ wird dann dargestellt durch die Formel

$$(\exists X_1)[\Phi \wedge X_1(U_1, U_2, \dots, U_r)].$$

Hat $\varphi^{\downarrow}$ die Stufe Null, so ist an dieser Stelle nichts zu beweisen.
Das Komplement der Relation φ wird dargestellt durch die Formel $\neg\Phi$, d.h. es gilt

$$\varphi^{\sim} := \neg\Phi|_{X_1,X_2,\dots,X_s}.$$

Ist λ eine Permutation der Menge $\{1, 2, \dots, s\}$, so folgt
$\varphi\lambda := \Phi|_{X_{\lambda(1)}, X_{\lambda(2)}, \dots, X_{\lambda(s)}}$.

Also ist auch $\varphi\lambda$ durch die Formel Φ darstellbar.

Für die Projektion φ_{s-1} von φ gilt $\varphi_{s-1} := (\exists X_s)(\Phi)|_{X_1,X_2,\dots,X_s}$.

Für die Erweiterung $\varphi^{s+1,p}$ gilt $\varphi^{s+1,p} := \Phi \wedge X_{s+1} = X_{s+1}|_{X_1,X_2,\dots,X_{s+1}}$.

Also sind auch Projektionen und beliebige Erweiterungen durch Formeln darstellbar, wenn es die Relationen sind, auf die diese Operationen angewendet werden.

Seien nun φ_1 und φ_2 Relationen gleichen Typs $\neq 0$, die beide durch Formeln aus $L(R)$ darstellbar sind:

$$\varphi_1 := \Phi_1|_{X_1,X_2,\dots,X_s} \quad \text{und} \quad \varphi_2 := \Phi_2|_{Y_1,Y_2,\dots,Y_s}.$$

Dann folgt $\varphi_1 \cap \varphi_2 := (\exists X_1, X_2, \dots, X_s)(\Phi_1 \wedge \Phi_2)$

$$(X_1 = Y_1 \wedge X_2 = Y_2 \wedge \cdots \wedge X_s = Y_s)|_{Y_1,Y_2,\dots,Y_s}.$$

Damit ist gezeigt, daß alle durch elementare Operationen aus $R \cup \Delta \cup M$ erzeugbaren Relationen durch Formeln des Kalküls $L(R)$ darstellbar sind.

Es muß nun noch das Umgekehrte bewiesen werden, nämlich daß jede durch eine Formel des Kalküls $L(R)$ darstellbare Relation zur Menge $E(R)$ der durch elementare Operationen aus $R \cup \Delta \cup M$ erzeugten Relationen gehört.

Dies zeigen wir zunächst für Primformeln, dann induktiv nach dem Formelaufbau vorgehend für zusammengesetzte Formeln.

Ist $\varphi \,\varepsilon\, R$ eine Relation der Stellenzahl s und des Typs $t = (n_1, n_2, \dots, n_s)$, so gilt für eine entsprechende Formel $\varphi(X_1, X_2, \dots, X_s)$, daß die Variablen $X_1, X_2, \dots, X_s$ jeweils die dem Argumenttyp t entsprechende Stufe haben. Sind sie untereinander verschieden, so folgt $\varphi := \varphi(X_1, X_2, \dots, X_s)|_{X_1,X_2,\dots,X_s}$.

Sind nicht alle Variable verschieden, so gibt es eine Quasi-Diagonale λ^* vom entsprechenden Typ, so daß $\varphi \cap \lambda^* := \varphi(X_1, X_2, \dots, X_s)|_{X_1,X_2,\dots,X_s}$.

Für eine Primformel der Art $X = Y$ erhalten wir die den Variablen entsprechende Quasi-Diagonale $\lambda^* := X = Y|_{X,Y}$. Dabei ist $\lambda = (1, 2)$.

Für Primformeln $X = X$ erhalten wir $\lambda^* := X = X|_X$ mit $\lambda = (1)$.

Für Primformeln $X = \varphi$ oder $\varphi = X$ gilt $\varphi \in R$ und $\varphi^\uparrow := X = \varphi|X$ bzw. $\varphi^\uparrow := \varphi = X|_X$.

Betrachten wir nun Primformeln der Art $X(X_1, X_2, \dots, X_s)$. Es sei zunächst angenommen, daß die Variablen X_i untereinander verschieden sind.

Bezeichnen wir mit $t = (n_1, n_2, \dots, n_s)$ den Argumenttyp der Prädikatvariablen X, so ergibt sich $\mu_t := X(X_1, X_2, \dots, X_s)|_{X_1,X_2,\dots,X_s}$. D.h. wir erhalten die Metarelation des Typs t.

Ist die obige Bedingung nicht erfüllt, d.h. sind die Variablen $X_1, X_2, \dots, X_s$ nicht untereinander verschieden, so ergibt sich auf ähnliche Weise wie bei der Diskussion der Primformeln für eine geeignete Quasi-Diagonale λ^*, daß

$$\mu_t \cap \lambda^* := X(X_1, X_2, \dots, X_s)|_{X_1,X_2,\dots,X_s}$$

Primformeln der Art $\varphi(t_1, t_2, \ldots, t_s)$ oder $X(t_1, t_2, \ldots, t_s)$, die auch konstante Terme enthalten, wollen wir erst später betrachten, wenn wir die Konjunktion von Teilformeln behandelt haben. Nun betrachten wir eine Formel Φ in den freien Variablen $X_1, X_2, \ldots, X_s$, von der wir annehmen, daß die Relation $\varphi := \Phi|_{X_1,X_2,\ldots,X_s}$ zu $E(R)$ gehöre.

Dann ergibt die Interpretation der Formel $\neg\Phi$ das Komplement der Relation φ und $(\exists X_s)\Phi$ ergibt die Projektion φ_s der Relation φ.

Ist schließlich noch eine weitere Formel Ψ in den Variablen $Y_1, Y_2, \ldots, Y_r$ gegeben, deren Interpretation ebenfalls in $E(R)$ liegt, so müssen wir nun noch die Formel $\Phi \wedge \Psi$ betrachten.

Es genügt zu beweisen, daß die Formel $\Phi \wedge \Psi$ bei einer bestimmten Reihenfolge ihrer freien Variablen eine Relation aus $E(R)$ ergibt. Seien nun $Z_1, Z_2, \ldots, Z_q$ die den beiden Formeln gemeinsamen freien Variablen. Für die restlichen Variablen der Formel Φ schreiben wir nach eventueller Änderung der Reihenfolge $X_{q+1}, X_{q+2}, \ldots, X_s$ und für die restlichen Variablen der Formel Ψ ebenso $Y_{q+1}, Y_{q+2}, \ldots, Y_r$.

Sei also $\varphi := \Phi|_{Z_1,\ldots,Z_q,X_{q+1},X_{q+2},\ldots,X_s}$
und $\psi := \Psi|_{Z_1,\ldots,Z_q,Y_{q+1},Y_{q+2},\ldots,Y_r}$.

Es gilt $\varphi \,\varepsilon\, E(R)$ und $\psi \,\varepsilon E(R)$, denn $E(R)$ ist invariant gegen beliebige Permutationen von Argumenten. Nun erweitern wir die Relation φ um $r-q$ den Variablen $Y_{q+1}, \ldots, Y_r$ entsprechende Stellen und wir erweitern ψ um $s-q$ den Variablen $X_{q+1}, \ldots, X_s$ entsprechende Stellen. Diese Erweiterungen $\varphi^{s+1,s+2,\ldots s+r-q}$ und $\psi^{r+1,r+2,\ldots,s+r-q}$ erhalten wir durch
Formeln:

$$\begin{aligned}
\varphi^{s+1,s+2,\ldots s+r-q} &:= \Phi \wedge Y_{q+1} = Y_{q+1} \wedge \cdots \wedge Y_r \\
&= Y_r|_{Z_1,\ldots,Z_q,X_{q+1},X_{q+2},\ldots,X_s,Y_{q+1},Y_{q+2},\ldots,Y_r}, \\
\psi^{q+1,q+2,\ldots,s} &:= \Psi \wedge X_{q+1} = X_{q+1} \wedge \cdots \wedge X_s \\
&= X_s|_{Z_1,\ldots,Z_q,X_{q+1},X_{q+2},\ldots,X_s,Y_{q+1},Y_{q+2},\ldots,Y_r}.
\end{aligned}$$

Wir müssen uns noch überzeugen, daß $\varphi^{s+1,s+2,\ldots s+r-q}$ und $\psi^{r+1,r+2,\ldots,s+r-q}$ wirklich in $E(R)$ liegen. Solange unter den Variablen $X_{q+1}, X_{q+2}, \ldots, X_s$ und $Y_{q+1}, Y_{q+2}, \ldots, Y_r$ keine Prädikatvariablen vorkommen, besteht hier kein Problem. Betrachten wir nun den Fall, daß eine der Variablen, z.B. X_j eine Prädikatvariable vom Typ $t = (n_1, n_2, \ldots, n_u)$ und der Stufe p sei. Dann muß die gewöhnliche Erweiterung noch mit einer Relation geschnitten werden, die in der entsprechenden Stelle nur Argumente vom Typ t erlaubt. Eine entsprechende einstellige Relation erhalten wir als Projektion von μ_t in die erste

Stelle, d.h. $\mu_{t,2,3,\dots,u}$ hat die gewünschte Eigenschaft. Eine geeignete Erweiterung von $\mu_{t,2,3,\dots,u}$ ist dann die Relation, die wir suchen. Es ergibt sich $\varphi^{s+1,s+2,\dots,s+r-q} \varepsilon E(R)$ und $\psi^{r+1,r+2,\dots,s+r-q} \varepsilon E(R)$
Da außerdem die Formeln $\Phi \wedge \Psi$ und

$$\Phi \wedge Y_{q+1} = Y_{q+1} \wedge \cdots \wedge Y_r = Y_r \wedge \Psi \wedge X_{q+1} = X_{q+1} \wedge \cdots \wedge X_s = X_s$$

äquivalent sind, folgt

$$\begin{aligned} &\varphi^{s+1,s+2,\dots s+r-q} \cap \psi^{r+1,r+2,\dots,s+r-q} \\ &\quad := \Phi \wedge \Psi|_{Z_1,\dots,Z_q,X_{q+1},X_{q+2},\dots,X_s,Y_{q+1},Y_{q+2},\dots,Y_r}. \end{aligned}$$

Da die Relation $\varphi^{s+1,s+2,\dots s+r-q} \cap \psi^{r+1,r+2,\dots,s+r-q}$ in $E(R)$ liegt, ist bewiesen, daß durch $\Phi \wedge \Psi$ nur Relationen aus $E(R)$ dargestellt werden.

Nun kommen wir auf die noch nicht behandelten Primformeln der Art $\varphi(t_1, t_2, \dots, t_s)$ oder $X(t_1, t_2, \dots, t_s)$ zurück, die auch konstante Terme enthalten. Sei zum Beispiel t_1 der konstante Term φ_1. Wir ersetzen die Primformel $\varphi(t_1, t_2, \dots, t_s)$ durch eine äquivalente Formel der Art $(\exists X_1)\,[\varphi(X_1, t_2, \dots, t_s) \wedge X_1 = \varphi_1]$. Auf diese Weise lassen sich alle konstanten Terme in Primformeln eliminieren.

b) Ist $c \in E(R)$, so folgt $c^{\uparrow} \in E(R)$. Ist umgekehrt $c^{\uparrow}$ in $E(R)$, so folgt $c^{\uparrow\downarrow} = c \in E(R)$.

4. Ableitbarkeit von Relationen

Wir wollen in diesem Abschnitt die Fragestellung 1 aus dem ersten Kapitel wieder aufnehmen: welche weiteren Relationen lassen sich aus einer Menge R von primitiven Relationen allein mit logischen Mitteln ableiten?

Wie wir sehen werden, gibt es mehrere mögliche Antworten auf diese Frage, je nachdem, was unter logischen Hilfsmitteln verstanden wird.

Betrachten wir zunächst die Relationen, die sich aus einer gegebenen Menge R mittels der elementaren Operationen und unter Zuhilfenahme der trivialen Relationen erzeugen lassen.

Satz 1 des vorigen Abschnitts sagt aus, daß und wie sich diese Relationen mit logischen Hilfsmitteln aus den primitiven Relationen der Menge R ableiten lassen. Dieser Satz rechtfertigt also die folgende Definition.

Definition. Eine Relation φ der Stufe > 0 heißt aus der Relationenmenge R elementar ableitbar, wenn es im Kalkül $L(R)$ eine Formel Φ in den freien Variablen, $X_1, X_2, \dots, X_s$ gibt, so daß $\varphi := \Phi|_{X_1,X_2,\dots,X_s}$.

Ein Element c der Stufe Null heißt elementar ableitbar, wenn es im Kalkül $L(R)$ eine Formel Φ in einer freien Variablen X gibt, so daß $c^{\uparrow} := \Phi|_X$.

Die Menge aller aus R elementar ableitbaren Relationen ist gemäß obiger Definition und gemäß Satz 1 gleich der in §3 eingeführten Menge $E(R)$.

Nun kann der folgende Fall eintreten: alle Lösungen einer Relation φ sind elementar ableitbar. Ist dann auch φ selbst elementar ableitbar?

Wir betrachten also eine Relation φ mit der Eigenschaft: wenn

$$\vdash \varphi(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s), \text{ so sind die Elemente } \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$$
$$\text{elementar ableitbar.}$$

Eine solche Relation muß nicht notwendigerweise selbst elementar ableitbar sein, da die Menge der Lösungstupel $(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s)$ beliebig verwickelt sein kann. In vielen Fällen folgt nämlich, daß es nur abzählbar viele elementar ableitbare Relationen geben kann, hingegen können überabzählbar viele Relationen durch Vorgabe der Lösungstupel $(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s)$ entstehen. Ein konkretes Beispiel dafür werden wir später geben (siehe Beispiel 1, in §6).

Nun wird aber φ unter jeder Abbildung invariant bleiben, die alle elementar ableitbaren Relationen invariant läßt. Daher ist es für unsere Zwecke nötig, einen weiter gefaßten Begriff der Ableitbarkeit[6] zu betrachten. Dabei müssen wir in gewisser Weise die Definierbarkeit beliebiger Mengen aus bereits definierten Elementen als möglich akzeptieren. Schließlich muß der ins Auge zu fassende Begriff der Ableitbarkeit noch gegen beliebige Iterationen abgeschlossen sein, da diese Eigenschaft allen Definitionsprozessen zukommt. Man kann sich beim Definieren immer auf bereits Definiertes beziehen.

Wir kommen also zu folgenden Postulaten der Ableitbarkeit:

A1) Jede aus der Relationenmenge R elementar ableitbare Relation φ ist aus R ableitbar.

A2) Sind alle Relationen der Menge S aus R ableitbar und ist φ aus S ableitbar, so ist φ aus R ableitbar.

A3) Ist φ eine Relation mit der Eigenschaft, daß aus $\vdash \varphi(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s)$ die Ableitbarkeit von $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$ folgt, so ist auch die Relation φ selbst aus R ableitbar.

[6] Das Problem, ob es Relationen gibt, die nach Axiom A3) ableitbar sind aber nicht elementar ableitbar, kennzeichnet Sebastião e Silva als ein sehr subtiles und schwieriges. Er vergleicht es hinsichtlich seiner Schwierigkeit mit dem Problem der Widerspruchsfreiheit der Arithmetik. Jedoch gilt diese Aussage nur unter der Bedingung, daß man Relationen beliebig hoher, auch transfiniter Stufen zuläßt.

In der hier vorgelegten Darstellung stellt sich dieses Problem nicht, weil wir nur Relationen endlicher Stufen zulassen.

Definition. Sei $\Sigma(R)$ das System aller Relationenmengen M mit den Eigenschaften

i) $R \subseteq M$,
ii) ist $U \subseteq M$, so folgt $E(U) \subset M$,
iii) ist φ eine Relation derart, daß $\vdash \varphi(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_s)$ stets $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_s \, \varepsilon M$ nach sich zieht, so folgt $\varphi \, \varepsilon \, M$.

Das System $\Sigma(R)$ ist übrigens nicht leer, da die Menge aller Relationen offensichtlich die geforderten Eigenschaften hat.
A4) Sei $M \in \Sigma(R)$. Dann enthält M alle ableitbaren Relationen.

Postulat A2) ist eine Transitivitätsregel, die besagt, daß das Ableiten neuer Relationen aus bereits gegebenen beliebig iteriert werden kann. A3) ist die entscheidende Eigenschaft, die uns über die elementare Ableitbarkeit hinausführt. A4) bedeutet, daß es außer den Mechanismen von A1) und A3) keine weiteren Konstruktionsmechanismen geben soll, die von gegebenen zu neuen ableitbaren Relationen führen.
(4.1) Es gibt genau eine Zuordnung, die jeder Menge R von Relationen eine Menge $<R>$ der aus R ableitbaren Relationen zuordnet, so daß die Postulate A1)–A4) erfüllt sind, nämlich die Zuordnung $R \rightarrow <R> = \bigcap_{(M \varepsilon \Sigma(R))} M$.

Beweis. Wir zeigen zunächst, daß $<R>$ die Postulate A1)–A4) erfüllt. Die Eigenschaften i), ii) und iii) der Mengen M in $\Sigma(R)$ übertragen sich auf den Durchschnitt $<R>$, d.h. $<R>$ gehört selbst zu $\Sigma(R)$. Daraus folgt sofort, daß $<R>$ die Postulate A1) und A3) erfüllt. Betrachten wir nun eine Menge $S \subseteq <R>$, deren Elemente alle aus R ableitbar sind, wie in A2). Jede R enthaltende Menge M mit den Eigenschaften i), ii) und iii) erfüllt diese Eigenschaften auch für S an Stelle von R, da sie auch S enthält. Daraus folgt $\Sigma(R) \subseteq \Sigma(S)$ und deswegen ist $<S> \subseteq <R>$. Somit ist jede aus S ableitbare Relation auch aus R ableitbar, und A2) ist erfüllt. Die Gültigkeit von A4) ergibt sich aus der Durchschnittsbildung.

Nun sei für jede Menge R eine Menge $M(R)$ gegeben, so daß die Postulate A1) bis A4) erfüllt sind. Wir konstruieren durch transfinite Induktion eine Untermenge M_1 von $M(R)$, welche die Eigenschaften i), ii) und iii) hat.

Dazu gehen wir von Axiom A1) aus und nennen die aus R elementar ableitbaren Relationen auch 0-ableitbar. Dann benutzen wir Axiom A3) und fügen alle Relationen zu $E(R) = E_0(R)$ hinzu, welche das Kriterium von A3) erfüllen, d.h. welche Lösungen nur in $E_0(R)$ haben. Die so entstandene Menge sei durch $T(E_0(R))$ bezeichnet. Über dieser Menge bilden wir wieder alle elementaren Ableitungen und nennen die so erhaltene Menge $E(T(E_0(R)) = E_1(R)$ die Menge der 1-ableitbaren Relationen. Dieser Prozeß muß unter Umständen durch transfinite Induktion fortgeführt werden. Ist dabei i eine Limeszahl und ist für alle Ordnungszahlen $\nu < i$ die Relationenmenge $E_\nu(R)$ bereits definiert, so setzen wir $E_i(R) = \cup_{(\nu<i)} E_\nu(R)$. Ist i keine Limeszahl, so setzen wir $E_i(R) = E(T(E_{i-1}(R)))$ wie im obigen Beispiel für $i = 1$.

Der Prozeß bricht offensichtlich ab, wenn für eine Ordnungszahl i einmal $E_i(R) = E_{i+1}(R)$ eintritt. Dies geschieht genau dann, wenn es keine neuen das Kriterium von A3) erfüllenden Relationen mehr gibt. Die gesuchte Menge M_1 ist dann gleich $E_i(R)$.

Da nun M_1 die Eigenschaften i), ii) und iii) hat, folgt aus A4), daß $M(R) \subseteq M_1$, und somit $M(R) = M_1$. Andererseits ergibt sich aus den Postulaten A1)–A3) daß $M_1 \subseteq <R>$ und somit folgt $M(R) = <R>$.

Definition. Wir nennen $<R>$ den logischen Abschluß von R. Von einer beliebigen Relation φ sagen wir dann und nur dann, sie sei aus R ableitbar, wenn $\varphi \, \varepsilon <R>$.

Der Beweis von (4.1) hat noch die folgende Aussage ergeben.

(4.2) Die ableitbaren Relationen werden durch einen transfiniten Konstruktionsprozeß erzeugt, wobei im i-ten Schritt die Menge der bereits erzeugten Relationen ersetzt wird durch $E_i(R) = E(T(E_{i-1}(R)))$, wenn i keine Limeszahl ist. Wenn i eine Limeszahl ist, so ist die Menge der bereits erzeugten Relationen gleich $\cup_{(\nu<i)} E_\nu(R)$ und diese Menge wird gleich $E_i(R)$.

Im folgenden werden wir öfters logische Formeln verwenden, um die Ableitbarkeit von Relationen zu beweisen. Der Gebrauch logischer Formeln setzt in jedem Fall voraus, daß man sich über den Kalkül im klaren ist, dem diese Formeln entstammen. Im ersten Kapitel war dieses Problem nicht aufgetreten, weil der Kalkül ein für allemal festgelegt war. Dies wird nun nicht mehr möglich sein, und zwar wegen der Konstruktionsschritte $T(E_{i-1}(R))$ nicht. Wir werden es daher nicht nur mit dem Kalkül $L(R)$ zu tun haben sondern wir werden an vielen Stellen von irgendwelchen ableitbaren Relationen $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n$ ausgehen und Formeln in einem neuen Kalkül $L(\{\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n\})$ bilden, um zu gewissen neuen ableitbaren Relationen zu kommen.

Für spätere Anwendung stellen wir noch einige einfache Aussagen zusammen.

(4.3) Sei φ eine aus der Menge R elementar ableitbare unäre Relation der Stufe $n+1$, deren Lösungen alle dieselbe Stufe, dieselbe Stellenzahl und denselben Argumenttyp haben.

Dann sind auch die Vereinigung $\cup_{(\vdash\varphi(\psi))} \psi$ und der Durchschnitt $\cap_{(\vdash\varphi(\psi))} \psi$ dieser Relationen elementar ableitbar. (Vereinigung und

Durchschnitt sind für beliebig viele Operanden analog zu definieren wie in §3 für zwei Operanden).

Beweis: Nach Voraussetzung gibt es eine Formel Φ mit einer freien Variablen X im Kalkül $L(R)$, so daß $\varphi := \Phi|_X$.

Wir können annehmen, daß X eine Prädikatvariable ist, deren Typ zu dem Typ der Lösungen der Relation φ paßt. Seien nun $X_1, X_2, \ldots, X_n$ Variable, die zu den Argumenten der Lösungen von φ passen. Dann ist $(\exists X)\,(\Phi \wedge X(X_1, X_2, \ldots, X_n))$ eine Formel im Kalkül $L(R)$, deren Interpretation bei der vorgegebenen Reihenfolge der Variablen gerade die Vereinigung

$$\cup_{(\vdash \quad \varphi(\psi))}\psi \text{ liefert.}$$

Denn sei $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$ eine Lösung von $\cup_{(\vdash \varphi(\psi))}\ \psi$. Dann gilt $\vdash\ \psi(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ für ein ψ mit $\vdash\ \varphi(\psi)$. Daraus folgt, daß die Aussagen $\Phi|_{X\to\psi}$ und somit auch $(\exists X)\,(\Phi \wedge X(\alpha_1, \ldots, \alpha_n))$ wahr sind.

Ist umgekehrt die letzte Aussage wahr, so gibt es ein ψ, so daß $\varphi(\psi) \wedge \psi(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ wahr ist und somit ist $(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ eine Lösung von $\cup_{(\vdash \varphi(\psi))}\ \psi$.

Den Durchschnitt $\cap_{(\vdash \varphi(\psi))}\ \psi$ erhält man nun, wie leicht einzusehen, durch die Formel $\neg(\exists X)\,(\Phi \wedge \neg X(X_1, \ldots, X_n))$[7] .

(4.4) Als Konsequenz aus Postulat A3) ist für jede Stufe $p > 1$ und jede Relationenmenge R die Relation $w_{\mathrm{R},p}\,(\alpha)$ mit der folgenden Definition aus der Menge R ableitbar.

$\vdash\ w_{\mathrm{R},p}(\alpha)$ dann und nur dann, wenn α aus R ableitbar und von der Stufe $p - 1$ ist.

(4.5) Sei Q eine beliebige Menge von Relationen der Stufe n und eines und desselben Typs t. Wenn dann jede Relation $\varphi\varepsilon Q$ aus der Relationenmenge R ableitbar ist, so ist es auch die Relation $\psi = \cap_{(\varphi\varepsilon Q)}\varphi$.

Beweis. Wir betrachten die einstellige Relation ε_Q der Stufe $n+1$ mit der Eigenschaft $\vdash\ \varepsilon_Q(\varphi)$ dann und nur dann, wenn $\varphi\epsilon Q$. Diese Relation ist aus R ableitbar. Nun ist leicht zu sehen, daß

$\vdash\ \psi(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_s)$ dann und nur dann, wenn

---

[7] Hat die Relation φ genau eine Lösung ψ, d.h. gelten die beiden Aussagen $(\exists X)(\varphi(X))$ und $(\forall X, Y)[(\varphi(X) \wedge \varphi(Y)) \to X = Y]$, so erhält man durch die für die Vereinigung angegebene Formel $(\exists X)(\Phi \wedge X(X_1, \ldots, X_n))$ die Operation der formalen Explikation, die Sebastião e Silva durch $\imath_X(\varphi(X))$ bezeichnet. Wir haben diese Operation nicht in die Elemente des Kalküls $L(R)$ aufgenommen, erstens um bei einem rein relationalen Kalkül bleiben zu können, zweitens weil sie nicht immer eine sinnvolle Interpretation hat und drittens, weil man sie, wie gerade gezeigt, in Wirklichkeit nur für die Bestimmung von Elementen des Fundaments A benötigt.

$\neg (\exists X) (\neg X(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_s) \wedge \varepsilon_Q(X))$ wahr ist. Somit ist die Relation ψ aus R ableitbar.

Definition. (vgl. [22]) Wir nennen zwei Relationen kompatibel oder verträglich, wenn sie mindestens eine Lösung gemeinsam haben. Von einer Relation ψ sagen wir, sie sei in einer Relation φ enthalten, und schreiben dies als $\psi \subseteq \varphi$, wenn jede Lösung von ψ auch Lösung von φ ist.

Eine aus R ableitbare Relation ψ heißt irreduzibel, wenn für jede mit ψ kompatible und ebenfalls aus R ableitbare Relation φ gilt $\psi \subseteq \varphi$.

Satz 2. Seien $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ beliebige Relationen (oder Elemente) aus der Vereinigungsmenge $A \cup R_1(A) \cup R_2(A) \ldots$. Dann gibt es genau eine irreduzible aus R ableitbare Relation ψ mit der Eigenschaft $\vdash \quad \psi(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$.[8]

Beweis: Es gibt mindestens eine ableitbare Relation, welche das gegebene Tupel $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$ als Lösung zuläßt, nämlich die durch die Formel $X_1 = X_1 \wedge X_2 = X_2 \wedge \cdots \wedge X_n = X_n$ gegebene Relation, wo $X_1, \ldots, X_n$ Variable von passender Stufe sind.

Nun betrachten wir die Relation χ mit der Eigenschaft

$\vdash \chi(\varphi)$ dann und nur dann, wenn φ ableitbar ist und

$\vdash \varphi(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$.

Da nach Voraussetzung alle Lösungen von χ ableitbar sind, ist χ selbst ableitbar. Wir bilden die Formel

$$\Psi : \neg(\exists X)(\chi(X) \wedge \neg X(X_1, X_2, \ldots, X_n)).$$

Sie stellt nach Aussage a) den Durchschnitt aller ableitbaren Relationen dar, die χ erfüllen, d.h. die $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$ als Lösung haben.

Sei $\psi := \Psi|_{X_1, X_2, \ldots, X_n}$. Angenommen die Relation ψ wäre nicht irreduzibel. Dann gäbe es eine ableitbare Relation φ, so daß $\vdash \psi(\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n)$ und $\vdash \varphi(\beta_1, \ldots, \beta_n)$ für ein geeignetes n-Tupel $(\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n)$ und $\vdash \psi(\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_n)$ aber $\vdash \varphi(\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_n)$ für ein anderes n-Tupel $(\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_n)$. Da φ die Relation ψ also nicht enthält, folgt auch $\vdash \varphi(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$. Die Relation $\zeta = \psi \cap \varphi^{\sim}$ wäre dann ableitbar, hätte $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$ als Lösung aber nicht $(\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n)$. Dies steht im Widerspruch zur Definition von ψ.

[8] Die Betrachtung der irreduziblen Relation ψ zu gegebenem Lösungstupel $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ gehört zu den zentralen Ideen in der Arbeit von Sebastião e Silva. Diese Idee liegt auch dem Beweisschritt 3 in den Beweisen des Satzes von Krasner aus den Kapiteln I und II zugrunde.

Ist nun ψ_1 ebenfalls eine irreduzible Relation mit $\vdash \psi_1(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$, so folgt $\psi \subseteq \psi_1$ und $\psi_1 \subseteq \psi$, also $\psi = \psi_1$.

Korollar zu Satz 2. Sei $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n$ eine beliebige Lösung der Relation ψ, so stimmen für $i = 1, 2, \ldots, n$ Stufe und Stellenzahl und Argumenttyp von α_i und β_i überein.

Beweis: Ist der Typ $t(\alpha_i) = 0$, so sei X_i eine Individuenvariable der Stufe 0. Ist jedoch $t(\alpha_i) = (n_{i,1}, n_{i,2}, \ldots, n_{i,s(i)})$, so sei X_i eine Prädikatvariable vom entsprechenden Typ. Wie im Beweis des Satzes betrachten wir die Formel $\Phi : \ X_1 = X_1 \wedge X_2 = X_2 \wedge \cdots \wedge X_n = X_n$.

Ihre Interpretation ergibt eine ableitbare Relation $\omega := \Phi|_{X_1, X_2, \ldots, X_n}$, deren Lösungen komponentenweise im Typ übereinstimmen. Außerdem gilt

$$\vdash \omega(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n).$$

Daraus und aus der Definition von ψ folgt $\psi \subseteq \psi \cap \omega$. Natürlich gilt aber auch $\psi \cap \omega \subseteq \psi$. Also ist $\psi = \psi \cap \omega$ und die Behauptung ist bewiesen.

5. Logisch ableitbare Funktionen

Ist $t = (n_1, n_2, \ldots, n_s)$ oder $t = 0$ ein Typ, so bezeichnen wir mit R_t die Menge aller Relationen dieses Typs (d.h. die Menge A, wenn $t = 0$). Wir betrachten in diesem Abschnitt Funktionen

$$F \ : \ R_{t_1} \times R_{t_2} \times \cdots \times R_{t_n} \to R_t$$

D.h. die Argumente der Funktion F sind Prädikatvariable $U_1, U_2, \ldots, U_n$ vom Typ $t_1, t_2, \ldots, t_n$. Das Ergebnis ist eine Relation vom Typ t (d.h. ein Element von A, wenn $t = 0$).

In der Menge aller möglichen derartigen Funktionen interessiert uns eine gewisse ausgezeichnete Untermenge, die eng mit dem Begriff der Ableitbarkeit von Relationen zusammenhängt. Es sei im folgenden eine Menge R von Relationen fest vorgegeben. Ableitbarkeit soll, wenn nichts anderes gesagt ist, Ableitbarkeit von R bedeuten.

(5.1) Sei $t = (n_1, n_2, \ldots, n_s)$. Dann sind die folgenden beiden Eigenschaften einer Funktion
$F \ : \ R_{t_1} \times R_{t_2} \times \cdots \times R_{t_n} \to R_t$ äquivalent:

i) es gibt eine ableitbare Relation ψ, für welche
$\vdash \psi(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n, \psi_1, \psi_2, \ldots, \psi_s)$ dann und nur dann, wenn

$$\vdash F(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)[\psi_1, \psi_2, \ldots, \psi_s]$$

ii) es gibt eine ableitbare Relation χ mit
$\vdash \chi(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n, \varphi)$ dann und nur dann, wenn
$\varphi = F(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$.

Beweis: Es sei dann X eine Prädikatvariable des Typs t und es seien $X_1, X_2, \ldots, X_s$ Individuenvariable respektive der Stufen $n_1, n_2, \ldots, n_s$.

A) Nehmen wir nun an, für die Funktion F sei i) erfüllt. Dann ergibt die Formel Φ

$$\forall X_1, X_2, \ldots, X_s)[\psi(U_1, U_2, \ldots, U_n, X_1, X_2, \ldots, X_s) \\ \equiv X(X_1, X_2, \ldots, X_s)]$$

eine ableitbare Relation $\chi := \Phi|_{U_1,U_2,\ldots,U_n,X}$ mit der Eigenschaft ii).
B) Sei umgekehrt χ eine ableitbare Relation mit der Eigenschaft ii).
Dann stellt die Formel Φ

$$(\exists X)[\chi(U_1, U_2, \ldots, U_n, X) \wedge X(X_1, X_2, \ldots, X_s)]$$

eine ableitbare Relation $\psi := \Phi|_{U_1,U_2,\ldots,U_n,X_1,X_2,\ldots,X_s}$ mit der gewünschten Eigenschaft i) dar.

Definition. Eine Funktion $F : R_{t_1} \times R_{t_2} \times \cdots \times R_{t_n} \to R_t$ heißt logisch ableitbar[9] (bezüglich der Relationenmenge R), wenn eine der beiden Bedingungen (5.1.i) oder (5.1.ii) erfüllt ist.

Der Fall $t = 0$ soll dabei auch zugelassen sein. Dann kann natürlich nur die Bedingung (5.1.ii) gemeint sein. Andernfalls sind die beiden Bedingungen gleichwertig, wie wir gesehen haben.

(5.2) Sei φ eine (aus R) ableitbare Relation oder ein ableitbares Element aus A. Dann ist die konstante Funktion $F(U_1, U_2, \ldots, U_n) = \varphi$ logisch ableitbar.

Beweis: Da φ ableitbar ist, so ist es auch die Relation $\varphi^\uparrow$, die φ als einzige Lösung hat. Sei X eine zu φ passende Variable und sei mit Φ die Formel

$$U_1 = U_1 \wedge U_2 = U_2 \wedge \cdots \wedge U_n = U_n \wedge \varphi^\uparrow(X) \text{ bezeichnet.}$$

Dann ist $\chi := \Phi|_{U_1,U_1,\ldots,U_n,X}$ eine ableitbare Relation. Wir sehen nun, daß

$$\vdash \chi(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n, \beta) \text{ nur möglich ist, wenn erstens}$$

[9] Logisch ableitbare Funktionen treten in der Arbeit von Sebastião e Silva implizit dadurch auf, daß in den von ihm betrachteten logischen Ausdrücken auch Operatoren vorkommen dürfen. In diesem Zusammenhang ist insbesondere die Operation $\imath_X$ der formalen Explikation wichtig.

$U_1 \to \alpha_1, U_2 \to \alpha_2, \dots, U_n \to \alpha_n$ eine zulässige Substitution ist und wenn zweitens $\beta = \varphi$. Daher erfüllt die Relation χ für die gegebene Funktion F Bedingung a.ii) und somit ist F logisch ableitbar.

(5.3) Für $i = 1, 2, \dots, n$ ist die Funktion $F(U_1, U_2, \dots U_n) = U_i$ logisch ableitbar.

Beweis: Sei X eine weitere Variable vom selben Typ wie U_i. Es bezeichne Φ die Formel

$$U_1 = U_1 \wedge U_2 = U_2 \wedge \cdots \wedge U_n = U_n \wedge U_i = X.$$

Dann ist $\chi := \Phi|_{U_1, U_2, \dots, U_n, X}$ eine ableitbare Relation.

Zudem erfüllt χ für die gegebene Funktion F die Bedingung (5.1.ii). Also ist F logisch ableitbar.

(5.4) Ist $F(U_1, U_2, \dots, U_n)$ eine logisch ableitbare Funktion, $s \geq 0$ die Stellenzahl des Ergebnisses, p irgendeine Stufe und λ eine Permutation der Menge $\{1, 2, \dots, s\}$, so sind

i) $G(U_1, U_2, \dots, U_n) = F(U_1, U_2, \dots, U_n)^{\uparrow}$
ii) $G(U_1, U_2, \dots, U_n) = F(U_1, U_2, \dots, U_n)^{\downarrow}$
iii) $G(U_1, U_2, \dots, U_n) = F(U_1, U_2, \dots, U_n)_{s-1}$,
iv) $G(U_1, U_2, \dots, U_n) = F(U_1, U_2, \dots, U_n)^{s+1,p}$,
v) $G(U_1, U_2, \dots, U_n) = F(U_1, U_2, \dots, U_n)\lambda$ und
vi) $G(U_1, U_2, \dots, U_n) = F(U_1, U_2, \dots, U_n)^{\sim}$

ebenfalls logisch ableitbare Funktionen. Dabei ist für die Aussagen ii) – vi) natürlich vorausgesetzt, daß das Funkionsergebnis von F mindestens die Stufe 1 hat, daß also $s > 0$. Bei ii) ist zusätzlich vorausgesetzt, daß das Element $F(\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n)^{\downarrow}$ für alle zulässigen Substitutionen $U_1 \to \varphi_1, U_2 \to \varphi_2, \dots, U_n \to \varphi_n$ existiert.

Beweis: Nach Definition existiert für die logisch ableitbare Funktion F eine die Bedingung (5.1.ii) erfüllende ableitbare Relation χ.

Zu (5.4.i). Wir wählen geeignete Variable und betrachten folgende Formel Φ:

$$(\exists X)\,(\forall Z)\,[Y(X) \wedge \chi(U_1, \dots, U_n, X) \wedge (Y(X) \to Z = X)].$$

Wir behaupten, daß $\chi_1 := \Phi|_{U_1, U_2, \dots, U_n, Y}$ für die neue Funktion $F(U_1, U_2, \dots, U_n)^{\uparrow}$ die Bedingung (5.1ii) erfüllt.

Sei $U_1 \to \alpha_1, \dots, U_n \to \alpha_n, Y \to \beta$ eine zulässige Substitution. Ferner sei φ das eindeutig bestimmte Element mit $\vdash \chi(\alpha_1, \dots, \alpha_n, \varphi)$. Dann ist die Aussage

$$(\exists X)\,(\forall Z)\,[(\beta(X) \wedge \chi(\alpha_1, \dots, \alpha_n, X) \wedge (\beta(X) \to Z = X)]$$

gleichwertig mit $(\forall Z)[\beta(\varphi) \wedge \chi(\alpha_1, \ldots, \alpha_n, \varphi) \wedge (\beta(\varphi) \rightarrow Z = \varphi)]$. Die letzte Aussage kann aber nur wahr sein, wenn $\beta = \varphi^{\uparrow}$.

Zu (5.4.ii). Wir wählen geeignete Variable und betrachten folgende Formel Φ.

$$(\exists X)\,[\chi(U_1, \ldots, U_n, X) \wedge X(U)].$$

Wir behaupten, daß $\chi_1 := \Phi|_{U_1, U_2, \ldots, U_n, U}$ für die neue Funktion $F(U_1, U_2, \ldots, U_n)^{\downarrow}$ die Bedingung (5.1ii) erfüllt.

Sei $U_1 \rightarrow \alpha_1, \ldots, U_n \rightarrow \alpha_n, U \rightarrow \beta$ eine zulässige Substitution. Ferner sei φ wie im Beweis von (5.4.i) das eindeutig bestimmte Element mit $\vdash \chi(\alpha_1, \ldots, \alpha_n, \varphi)$. Dann ist die Aussage

$$(\exists\, X)\,[\chi(\alpha_1, \ldots, \alpha_n, X) \wedge X(\beta)]$$

gleichwertig mit der Aussage $\chi(\alpha_1, \ldots, \alpha_n, \varphi) \wedge \varphi(\beta)$.

Nach Voraussetzung existiert $\varphi^{\downarrow}$. Also kann die letzte Aussage nur wahr sein, wenn $\beta = \varphi^{\downarrow}$.

Für die restlichen Aussagen iii)–vi) betrachten wir eine für die logisch ableitbare Funktion F die Bedingung (5.1.i) erfüllende ableitbare Relation ψ. Sie existiert, weil wir für iii)–vi) voraussetzen, daß das Ergebnis von F mindestens die Stufe eins hat.

Zu (5.4.iii). Von den drei Aussagen iii.A)–iii.C) ist jede mit der darauf folgenden iii.B)–iii.D) äquivalent:

iii.A) $\vdash\ \psi_{n+s-1}(\alpha_1, \ldots, \alpha_n, \psi_1, \ldots, \psi_{s-1})$
iii.B) es gibt ein Element ψ_s mit $\vdash\ \psi(\alpha_1, \ldots, \alpha_n, \psi_1, \ldots, \psi_{s-1}, \psi_s)$
iii.C) es gibt ein Element ψ_s mit $\vdash\ F(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)[\psi_1, \ldots, \psi_{s-1}, \psi_s]$
iii.D) $\vdash\ F(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)_{s-1}[\psi_1, \ldots, \psi_{s-1}]$

Also sind alle vier Aussagen untereinander äquivalent und ψ_{n+s-1} erfüllt für die Funktion G die Bedingung (5.1.i). Somit ist G logisch ableitbar.

Zu (5.4.iv). Von den drei Aussagen iv.A) – iv.C) ist jede mit der darauf folgenden iv.B)–iv.D) äquivalent:

iv.A) $\vdash\ \psi^{n+s+1,p}(\alpha_1, \ldots, \alpha_n, \psi_1, \ldots, \psi_s, \psi_{s+1})$
iv.B) ψ_{s+1} ist ein Element der Stufe $< p$ und
$\vdash\ \psi(\alpha_1, \ldots, \alpha_n, \psi_1, \ldots, \psi_s)$
iv.C) ψ_{s+1} ist ein Element der Stufe $< p$ und
$\vdash\ F(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)\,[\psi_1, \ldots, \psi_s]$
iv.D) $\vdash\ F(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)^{s+1,p}[\psi_1, \ldots, \psi_s, \psi_{s+1}]$

Also sind alle vier Aussagen untereinander äquivalent und $\psi^{n+s+1,p}$ erfüllt für G die Bedingung (5.1.i). Somit ist G logisch ableitbar.

Zu (5.4.v). Es sei λ_1 die Permutation der Ziffern $\{1, 2, \ldots, n+s\}$ mit $\lambda_1(i) = i$ für $i = 1, 2, \ldots, n$ und $\lambda_1(n+j) = n + \lambda(j)$ für $j = 1, 2, \ldots, s$. Von den drei Aussagen v.A)–v.C) ist dann jede mit der darauf folgenden v.B)–v.D) äquivalent:

v.A) $\vdash \psi\lambda_1(\alpha_1, \ldots, \alpha_n, \psi_1, \ldots, \psi_s)$
v.B) $\vdash \psi(\alpha_1, \ldots, \alpha_n, \psi_{\lambda(1)}, \ldots, \psi_{\lambda(s)})$
v.C) $F(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)[\psi_{\lambda(1)}, \ldots, \psi_{\lambda(s)}]$
v.D) $F(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)\lambda[\psi_1, \ldots, \psi_s]$

Also sind alle vier Aussagen untereinander äquivalent und $\psi\lambda_1$ erfüllt für die Funktion G die Bedingung (5.1.i). Somit ist G logisch ableitbar.

Zu (5.4.vi) Sei τ die Relation, die für ein Tupel $(\alpha_1, \ldots, \alpha_n, \psi_1, \ldots, \psi_s)$ erfüllt ist, wenn $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ den Argumenttyp $t_1, \ldots, t_n$ und $\psi_1, \ldots, \psi_s$ die Stufe $n_1, \ldots, n_s$ haben, und für keine andern. Wie wir wissen ist τ ableitbar. Es ergibt sich, daß von den Aussagen vi.A) – vi.B) jede mit der darauf folgenden vi.B)–vi.C) äquivalent ist:

vi.A) $\vdash \psi^{\sim}(\alpha_1, \ldots, \alpha_n, \psi_1, \ldots, \psi_s) \cap \tau(\alpha_1, \ldots, \alpha_n, \psi_1, \ldots, \psi_s)$
vi.B) $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ sind mit den Typen $t_1, \ldots, t_n$ verträglich und $\psi_1, \ldots, \psi_s$ haben respektive die Stufen $n_1, n_2, \ldots, n_s$ und
$\vdash \psi(\alpha_1, \ldots, \alpha_n, \psi_1, \ldots, \psi_s)$
vi.C) $\vdash F(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)^{\sim}[\psi_1, \ldots, \psi_s]$

Also sind alle drei Aussagen untereindander äquivalent und $\psi^{\sim} \cap \tau$ erfüllt für G die Bedingung (5.1.i). Somit ist G logisch ableitbar.

(5.5) Sind $F_1(U_1, U_2, \ldots, U_n)$ und $F_2(U_1, U_2, \ldots, U_n)$ logische Funktionen vom gleichen Argumenttyp, deren Ergebnis den gleichen Typ $\neq 0$ hat, so ist
$G(U_1, U_2, \ldots, U_n) = F_1(U_1, U_2, \ldots, U_n) \cap F_2(U_1, U_2, \ldots, U_n)$ eine logisch ableitbare Funktion.

Beweis: Seien ψ_1 und ψ_2 die Relationen, so daß Bedingung (5.1.i) für die Funktion F_1 bzw. für die Funktion F_2 erfüllt ist. Dann ergibt sich:
$\vdash \psi_1 \cap \psi_2(\alpha_1, \ldots, \alpha_n, \psi_1, \ldots, \psi_s)$ dann und nur dann, wenn
$\vdash F_1(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \cap F_2(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)[\psi_1, \ldots, \psi s]$.

Somit erfüllt $\psi_1 \cap \psi_2$ die Bedingung (5.1.i) für die Funktion $G(U_1, \ldots, U_n) = F_1(U_1, \ldots, U_n) \cap F_2(U_1, \ldots, U_n)$ und G ist logisch ableitbar.

(5.6) Seien $(F_{1\lambda}), \ldots, (F_{s\lambda})$ $(\lambda \varepsilon \Lambda)$ Familien von logisch ableitbaren Funktionen in denselben Argumenten $U_1, U_2, \ldots, U_n$. Sei $F(U_1, U_2, \ldots, U_n)$ definiert durch folgende Regel: für jede zulässige Substitution $U_1 \to \alpha_1, \ldots, U_n \to \alpha_n$

$\vdash F(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)[\psi_2, \psi_2, \ldots, \psi_s]$ genau dann, wenn es einen Index $\lambda \varepsilon \Lambda$ gibt, so daß $\psi_1 = F_{1\lambda}(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n), \ldots, \psi_s = F_{s\lambda}(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$. Dann ist F eine logisch ableitbare Funktion.

Beweis: Für jede Funktion $F_{i\lambda}$ gibt es eine ableitbare Relation $\chi_{i\lambda}$, welche die Bedingung (5.1.ii) erfüllt. Daher gibt es eine ableitbare Relation ρ, für welche $\vdash \rho(\chi_1, \ldots, \chi_s)$ dann und nur dann, wenn es einen Index $\lambda \varepsilon \Lambda$ gibt mit $\chi_1 = \chi_{1\lambda}, \chi_2 = \chi_{2\lambda}, \ldots, \chi_s = \chi_{s\lambda}$.

Betrachten wir nun die folgende Formel:

$$(\exists Y_1, Y_2, \ldots, Y_s)[\rho(Y_1, \ldots, Y_s) \\ \wedge Y_1(U_1, \ldots, U_n, X_1) \wedge \cdots \wedge Y_s(U_1, \ldots, U_n, X_s)].$$

Sie stellt eine ableitbare Relation $\psi := \Phi|_{U_1, U_2, \ldots, U_3, X_1, \ldots, X_s}$ dar.
Wir behaupten
$\vdash \psi(\alpha_1, \ldots, \alpha_n, \psi_1, \ldots, \psi_s)$ dann und nur dann, wenn
$\vdash F(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)[\psi_1, \ldots, \psi_s]$.

Sei $U_1 \to \alpha_1, U_2 \to \alpha_2, \ldots, U_n \to \alpha_n, X_1 \to \psi_1, \ldots, X_s \to \psi_s$ eine zulässige Substitution. Wenn dadurch Φ zu einer wahren Aussage wird, so muß es für die gebundenen Variablen $Y_1, \ldots, Y_s$ Werte $\chi_1, \ldots, \chi_s$ geben, so daß $\vdash \rho(\chi_1, \ldots, \chi_s)$ und $\vdash \chi_i(\alpha_1, \ldots, \alpha_n, \psi_i)$ für $i = 1, 2, \ldots, s$.

Die erste Aussage ist gleichbedeutend damit, daß $\chi_1 = \chi_{1\lambda}, \ldots, \chi_s = \chi_{s\lambda}$ für ein geeignetes $\lambda \varepsilon \Lambda$.

Die restlichen s Behauptungen bedeuten dann, daß $\psi_i = F_{i\lambda}(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ für $i = 1, 2, \ldots, s$. Somit ergibt sich
$\vdash F(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)[\psi_1, \ldots, \psi_s]$.

Wenn nun umgekehrt diese letzte Aussage gilt, so ist $U_1 \to \alpha_1, \ldots, U_n \to \alpha_n, X_1 \to \psi_1, \ldots, X_s \to \psi_s$ eine zulässige Substitution und es ist $\psi_i = F_{i\lambda}(\alpha_1, \ldots \alpha_n)$ für ein $\lambda \varepsilon \Lambda$ und $i = 1, 2, \ldots s$. Daraus folgt mit $\chi_i = \chi_{i\lambda}$, daß
$\vdash \rho(\chi_1, \ldots, \chi_s)$ und
$\vdash \chi_i(\alpha_1, \ldots, \alpha_n, \psi_i)$ für $i = 1, 2, \ldots, s$.

Somit ist $\chi_1, \ldots, \chi_s$ ein Tupel, das wir uns für die gebundenen Variablen $Y_1, \ldots, Y_s$ eingesetzt denken können und dessen Existenz beweist, daß die Formel Φ bei der obigen Substitution zu einer wahren Aussage wird. Also folgt
$\vdash \psi(\alpha_1, \ldots, \alpha_n, \psi_1, \ldots, \psi_s)$.

(5.7) Ist $F(U_1, U_2, \ldots, U_n)$ eine logisch ableitbare Funktion und ist $U_1 \to \alpha_1, \ldots, U_n \to \alpha_n$ eine zulässige Substitution, so ist das Funktionsergebnis $\varphi = F(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$ aus der Relationenmenge $R \cup \{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n\}$ ableitbar.

Beweis: Sei χ die nach Definition existierende ableitbare Relation, die für F die Bedingung (5.1.ii) erfüllt. Für jedes $i = 1, 2, \ldots, n$ sei $\alpha_i^{\uparrow}$ die Relation, die α_i als einzige Lösung zuläßt. Die Relation $\alpha_i^{\uparrow}$ ist von α_i ableitbar. Seien nun $X_1, \ldots, X_n, X$ geeignete Variable und betrachten wir die folgende Formel Φ:

$$(\exists X_1, \ldots, X_n)\,[\chi(X_1, X_2, \ldots, X_n, X) \wedge \alpha_1^{\uparrow}(X_1) \wedge \cdots \wedge \alpha_n^{\uparrow}(X_n)]$$

Sie stellt eine von $R \cup \{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n\}$ ableitbare Relation $\Phi|_X$ dar und die Aussagen
$\vdash\ \chi(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n, \varphi)$ und
$\vdash\ \Phi|_X(\varphi)$
sind gleichwertig. Da φ auch die einzige Lösung der Relation $\Phi|_X$ ist, so folgt, daß φ aus der Relationenmenge $R \cup \{\alpha_1, \ldots, \alpha_n\}$ ableitbar ist.

Satz 3. Sei φ eine beliebige s-stellige Relation $(s \geq 0)$, die sich aus den Relationen der Menge $R \cup \{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n\}$ ableiten läßt. Dann gibt es eine logisch ableitbare Funktion F, so daß $\varphi = F(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$.

Beweis: Wir betrachten zuerst den Fall, daß die Relation φ aus der Menge $R \cup \{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n\}$ elementar ableitbar ist.

Ist $\varphi \varepsilon R$ oder ist φ aus R allein elementar ableitbar, so können wir nach Aussage (5.2) für F die konstante Funktion $F(U_1, U_2, \ldots, U_n) = \varphi$ wählen.

Ist φ eine der Relationen $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$, etwa α_i, so können wir nach Aussage (5.3) für F die Funktion $F(U_1, U_2, \ldots, U_n) = U_i$ wählen.

Somit gilt die Behauptung für alle Relationen der Menge $R \cup S$, wo $S = \{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n\}$.

Nun gehen wir induktiv vor und benutzen dabei Satz 1 aus §3.

Seien $\varphi, \varphi_1, \varphi_2$ Relationen aus der Menge $E(R \cup S)$, für welche die Behauptung bereits bewiesen ist, d.h. für welche es logische Funktionen F, F_1, F_2 gibt, so daß $\varphi = F(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$ usw. Entsteht dann ψ aus φ durch eine der unären in §3 aufgezählten elementaren Operationen Θ, d.h. durch Heben der Stufe, Senken der Stufe, Projektion, Erweiterung, Negation oder Transformation mittels einer Permutation λ, so können wir gemäß Aussage (5.4) auf das Ergebnis von F die entsprechende Operation Θ anwenden und erhalten eine logisch ableitbare Funktion $G(U_1, U_2, \ldots, U_n) = F(U_1, U_2, \ldots, U_n)\Theta$. Ist aber $\varphi = \varphi_1 \cap \varphi_2$, so können wir gemäß Aussage (5.5) auf die Ergebnisse von F_1 und F_2 die Operation $\cap$ anwenden und erhalten eine ableitbare Funktion $G(U_1, U_2, \ldots, U_n) = F_1(U_1, U_2, \ldots, U_n) \cap F_2(U_1, U_2, \ldots, U_n)$.

Es folgt in beiden Fällen $G(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n) = \psi$. Nach Satz 1, §3 ist damit die Behauptung für alle Relationen aus der Menge $E(R \cap S)$ bewiesen.

Nun führen wir durch transfinite Induktion den Beweis, daß die Behauptung des Satzes für alle aus der Menge $R \cup S$ i-ableitbaren Relationen gilt, d.h. für alle Relationen der Menge $E_i(R \cup S)$. Wir nehmen an, dies sei für $\nu < j$ bereits bewiesen.

Ist j eine Limeszahl, so ist $E_j(R \cup S) = \cup E_\nu(R \cup S)$ und die Behauptung des Satzes überträgt sich ohne weiters auf $E_j(R \cup S)$. Sei also j keine Limeszahl.

Dann ist $E_j(R \cup S) = E(T(E_{j-1}(R \cup S)))$ und für alle Relationen aus $E_{j-1}(R \cup S)$ gilt die Behauptung.

Sei $\varphi \varepsilon T(E_{j-1}(R \cup S))$. Für jede Lösung $(\psi_1, \psi_2, \ldots, \psi_r)$ der Relation φ gilt dann $\psi_1 \,\varepsilon\, E_{j-1}(R \cup S), \ldots, \psi_r \,\varepsilon\, E_{j-1}(R \cup S)$. Wir können annehmen, die Lösungstupel seien mit Indizes aus einer Menge Λ versehen. D.h. also $\psi_1 = \psi_{1\lambda}, \ldots, \psi_r = \psi_{r\lambda}$ für ein geeignetes $\lambda \,\varepsilon\, \Lambda$. Nach Induktionsannahme gibt es logisch ableitbare Funktionen $F_{1\lambda}, F_{2\lambda}, \ldots, F_{r\lambda}$, so daß $\psi_{1\lambda} = F_{1\lambda}(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n), \ldots,\ \psi_{r\lambda} = F_{r\lambda}(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$. Nach Hilfssatz (5.6) gibt es daher eine logisch ableitbare Funktion F mit
$\vdash\ F(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)\ [\psi_1, \ldots, \psi_r]$ genau dann, wenn
$\vdash\ \varphi(\psi_1, \ldots, \psi_r)$. Somit folgt $\varphi = F(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$.

Nun bleibt noch der Übergang von $T(E_{j-1}(R \cup S))$ nach $E(T(E_{j-1}(R \cup S)))$. Hierbei können wir genauso argumentieren wie beim Beweis, daß alle aus der Menge $R \cup S$ elementar ableitbaren Relationen durch logisch ableitbare Funktionen darstellbar sind.

6. Strukturen

Gegeben seien ein Fundament A und eine Menge R von Relationen über A. Das Fundament darf eine endliche oder unendliche Menge sein, ebenso darf die Menge R endlich oder unendlich sein. Die einzelnen Relationen aus R dürfen Relationen beliebiger Stufe sein, auch Konstante aus dem Fundament A (Relationen der Stufe 0) sind zulässig. Durch die Relationen der vorgegebenen Menge R wird dem Fundament A eine Struktur (im Sinne von Sebastião e Silva) aufgeprägt. Wir bezeichnen diesen Sachverhalt ähnlich wie vorher durch $S = (A; R)$ und sprechen von S als der durch die Relationenmenge R definierten Struktur mit Fundament A.

Definition. Sei g: $A \to A$ eine bijektive Abbildung des Fundaments auf sich. Dann induziert g auch in den Relationenmengen $R_1(A), R_2(A), \ldots$ der Stufen 1, 2 usw. bijektive Abbildungen. Die Abbildung g wird ein Automorphismus der Struktur $S = (A; R)$ genannt, wenn für alle φ in der Menge R gilt $g(\varphi) = \varphi$.

Strukturen können im mathematischen Alltag in recht unterschiedlicher Weise gegeben sein:

1) Bei endlichen Strukturen relativ kleiner Kardinalität können die zugrundeliegenden Relationen durch Tableaus angegeben sein.
2) Eine Struktur kann durch ein Axiomensystem gegeben sein, das bis auf Isomorphie[10] nur eine Interpretation zuläßt.

Dieser Fall ist aus Gründen, die wir in Kapitel IV an Beispielen erläutern wollen, nicht so häufig, wie man vielleicht zunächst anzunehmen geneigt ist. Ein ähnlicher Fall ist der folgende:

3) Aus einer axiomatisch gegebenen Struktur erhält man durch Abstraktion, d.h. durch Weglassen bestimmter für die beabsichtigte Untersuchung nicht interessierender Relationen, oder durch Betrachtung abgeleiteter Relationen eine neue Struktur.
4) Aus einer bereits irgendwie gegebenen Struktur werden durch bestimmte Konstruktionsvorschriften neue Strukturen gebildet. Dabei wird meistens auch das Fundament A in die Konstruktion mit eingezogen. Dieser Fall liegt zum Beispiel in der analytischen Geometrie vor oder bei der Konstruktion der komplexen Zahlen aus den reellen.

[10] Den Isomorphiebegriff haben wir im Haupttext nicht definiert, weil er für die vorliegende Arbeit keine Rolle spielt. Zur Definition betrachte man zwei Strukturen $S = (A; R)$ und $S' = (A', R')$. Es seien bijektive Abbildungen $g : A \to A'$ und $f : R \to R'$ gegeben. Dann induziert g auch bijektive Abbildungen der Relationenmengen $R_1(A)$, $R_2(A)$ usw. über der Menge A auf die entsprechenden Relationenmengen $R_1(A')$, $R_2(A')$ usw. über der Menge A'.

Die Abbildung g heißt Isomorphismus der Struktur S auf die Struktur S' bezüglich der vorgegebenen Zuordnung zwischen den Relationenmengen R und R', wenn für alle Relationen $\varphi \in R$ gilt $g(\varphi) = f(\varphi)$ (vgl. [22], Seite 206).

Aufgrund der Definition der Abbildung, die von g auf den Relationenmengen $R_1(A)$, $R_2(A)$ usw. induziert wird, bedeutet die Definition das folgende: für eine beliebige Relation $\varphi \in R$ der Stellenzahl n und Elemente $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ passender Stufe sind die Aussagen

$$\begin{aligned} &\vdash \varphi(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n) \quad \text{und} \\ &\vdash f(\varphi)(g(\alpha_1), g(\alpha_2), \ldots, g(\alpha_n)) \end{aligned}$$

gleichwertig.

Daß es auch mehr als eine Zuordnung zwischen R und R' geben kann, bezüglich derer Isomorphismen zwischen zwei Strukturen $S = (A; R)$ und $S' = (A'; R')$ existieren, sieht man am Beispiel der Dualitäten projektiver Räume.

Beispiele

1) Die natürlichen Zahlen

A sei die Menge der natürlichen Zahlen $\{0, 1, 2, \ldots\}$, R die aus der Peanoschen Nachfolgerelation σ bestehende Menge. ($\vdash \sigma(n, m)$ dann und nur dann, wenn $m = n + 1$).

Die Formel $\Phi : \neg(\exists X)(\rho(X, Y))$ liefert für diese Struktur eine Relation $\zeta := \Phi|_Y$, deren einzige Lösung die Zahl 0 ist.

Durch die weitere Formel $(\exists Y)[\Phi(Y) \wedge \sigma(Y, Z)]$ läßt sich dann die Zahl 1 definieren usw. Man erkennt so, daß die Struktur $S = (A; R)$ keine nichttrivialen Automorphismen besitzt.

Ferner ist nun wegen des Axioms A3) jede beliebige Relation ableitbar. Also ist die Menge der ableitbaren Relationen überabzählbar. Da es aber in dem Kalkül $L(R)$ außer der Gleichheit nur ein primitives Prädikat gibt, nämlich σ, so ist die Menge der Formeln abzählbar. Es können mithin nicht alle ableitbaren Relationen elementar ableitbar sein.

2) Die reellen Zahlen

A sei die Menge der reellen Zahlen und R die aus den beiden Relationen α und μ bestehende Relationenmenge mit den Definitionen
$\vdash \alpha(a, b, c)$ dann und nur dann, wenn $a = b + c$,
$\vdash \mu(a, b, c)$ dann und nur denn, wenn $a = bc$.

Auch hier läßt sich zeigen, daß alle Elemente des Fundaments ableitbar sind, und infolgedessen gibt es keine nichttrivialen Automorphismen. Der Beweis ist allerdings komplizierter als für die natürlichen Zahlen, vorallem auch deswegen, weil elementare Ableitbarkeit nicht für alle reellen Zahlen gegeben ist.

In dieser Struktur läßt sich aufgrund der beiden gegebenen Relationen α und β die Anordnung definieren. Man nennt ein Element c ein Quadrat, wenn es ein Element b gibt, so daß $\vdash \mu(b, b, c)$. Setzt man dann $a \leq b$, wenn $b - a$ ein Quadrat ist, so hat man die gewöhnlich zur Axiomatisierung der reellen Zahlen vorgegebene Anordnung wiedergewonnen.

3) Die komplexen Zahlen

A sei die Menge der komplexen Zahlen und R sei die Menge $\{\alpha, \mu\}$, wobei ähnlich wie im vorigen Beispiel α die Addition vertritt und μ die Multiplikation.

Anders als der Körper der reellen Zahlen ist diese Struktur nicht starr, da es zum Beispiel den Automorphismus gibt, der jede komplexe Zahl auf die konjugiert komplexe abbildet. Ein tiefer liegender Unterschied zur Struktur der reellen Zahlen ist der, daß die topologische Struktur der komplexen Ebene nicht mittels der beiden Relationen α

und β definiert werden kann. Daß dies nicht möglich ist, folgt aus der Existenz nicht-stetiger Automorphismen (s. Aczél und Dhombres [1], Seite 57–59).

4) Topologische Räume

Topologische Räume bieten uns ein schönes Beispiel einer Klasse von Strukturen, bei deren Definition man Relationen der Stufe 2 benötigt. Sie lassen sich bekanntlich auf viele untereinander gleichberechtige Weisen axiomatisch charakterisieren, zum Beispiel auf der Grundlage des Umgebungsbegriffs, auf der Grundlage des Begriffs der offenen Menge, auf der Grundlage des Begriffs der abgeschlossenen Menge usw.

Wir beginnen mit dem Begriff der Umgebung. Dabei ist die Grundannahme, daß zu jedem Punkt $p \in A$ ein System von ausgezeichneten Teilmengen von A gegeben ist, genannt die Umgebungen des Punktes p. Für diese Umgebungen und für jeden Punkt p gelten die Haussdorffschen Umgebungsaxiome.

(U1) Ist U eine Umgebung des Punktes p, so folgt $p \in U$.
(U2) Ist U eine Umgebung des Punktes p und ist $U \subseteq V$, so ist auch V eine Umgebung des Punktes p.
(U3) a) Sind U_1 and U_2 Umgebungen des Punktes p, so ist auch $U_1 \cap U_2$ eine Umgebung des Punktes p.
(U3) b) A ist eine Umgebung des Punktes p.
(U4) Ist U eine Umgebung des Punktes p, so gibt es eine Umgebung V des Punktes p, so daß U auch Umgebung jedes Punktes $q \in V$ ist.

Zur Formulierung dieser Axiome in der formalen Sprache des Kalküls $L(R)$ benötigen wir ein Prädikat $v(P, U)$, das zu lesen ist als „die Teilmenge U ist eine Umgebung des Punktes P“. Erinnern wir uns dabei daran, daß Teilmengen von A als einstellige Relationen der Stufe 1 über A darzustellen sind. Die Axiome U1–U4 lassen sich dann wie folgt formalisieren:
Es seien P, X Argumentvariable der Stufe 0 und U, U_1, U_2, U_3, V Prädikatvariable der Stufe eins und Stellenzahl eins.

(U1) $(\forall P, U)\,[v(P, U) \to U(P)]$.
(U2) $(\forall P, U, V)\,([v(P, U) \wedge (\forall X)(U(X) \to V(X))] \to v(P, V))$.
(U3) a) $(\forall P, U_1, U_2, U_3)([v(P, U_1) \wedge v(P, U_2) \wedge$
$(\forall X)[U_3(X) \equiv (U_1(X) \wedge U_2(X))]] \to v(P, U_3))$.
(U3) b) $(\forall P, V)[(\forall X)\,V(X) \to v(P, V)]$.
(U4) $(\forall P, U)(v(P, U) \to (\exists V)[v(P, V) \wedge (\forall X)(V(X) \to$
$v(X, U))])$.

Der Begriff der offenen Menge läßt sich nun durch eine einstellige Relation der Stufe 2 angeben:
$\vdash \circ(\mu)$ dann, und nur dann,
wenn die Relation μ eine offene Teilmenge von A darstellt.

Die Relation $\circ$ ist aus der primitiven Relation υ elementar ableitbar. Um das einzusehen, genügt es, die folgende Formel Φ zu betrachten:

$$(\forall P)(U(P) \to (\exists V)[\upsilon(P, V) \wedge (\forall X)(V(X) \to U(X))])$$

Es ist klar, daß $\circ := \Phi|_U$. Also ist die Relation $\circ$ elementar ableitbar.

Zur Lösung des umgekehrten Problems, nämlich υ aus $\circ$ abzuleiten, genügt es, die folgende Formel Ψ zu betrachten:

$$(\exists V)[V(P) \wedge \circ(V) \wedge (X)(V(X) \to U(X))]$$

Erinnert man sich an die Tatsache, daß Umgebungen eines Punktes p genau die Teilmengen U von A sind, die eine offene Menge V mit $p \in V$ enthalten, so überzeugt man sich leicht, daß $\upsilon := \Psi|_{P,U}$.

Andere Beispiele werden wir im Kapitel IV noch näher betrachten.

Satz 4. Sei g ein Automorphismus der Struktur S. Dann läßt g jede ableitbare Relation invariant.

Beweis: Wir beweisen durch transfinite Induktion nach n, daß die Behauptung für alle n-ableitbaren Relationen wahr ist.

Zur Verankerung der Induktion dient folgende Aussage:
(6.1) läßt die Abbildung g alle Relationen einer Relationenmenge R invariant, so läßt g auch alle aus R elementar ableitbaren Relationen invariant.

Da die aus R elementar ableitbaren Relationen genau die durch Formeln im Kalkül $L(R)$ darstellbaren Relationen sind, können wir uns zum Beweis der Aussage (6.1) auf Satz 1, §3 zurückziehen. Es ist daher nur noch notwendig, sich zu vergewissern, daß bei den in §3 betrachteten elementaren Operationen aus invarianten Relationen nur invariante Relationen entstehen können.

Um nun den Induktionsbeweis zu Ende zu führen, nehmen wir an, die Aussage sei für alle Ordnungszahlen n kleiner als i bewiesen. Ist i eine Limeszahl, so ist jede i-ableitbare Relation auch n-ableitbar für ein $n < i$. In diesem Falle ist nichts zu zeigen. Ist i keine Limeszahl, so betrachten wir eine beliebige Relation $\varphi \,\varepsilon\, T(E_{i-1}(\mathrm{R}))\backslash E_{i-1}(\mathrm{R})$. Definitionsgemäß hat φ Lösungen nur in $E_{i-1}(\mathrm{R})$ und nach Induktionsannahme sind alle Relationen aus $E_{i-1}(\mathrm{R})$ unter g invariant. Daher ist φ unter g invariant. Es sind also alle Relationen der Menge $T(E_{i-1}(\mathrm{R}))$ unter g invariant und Aussage a) angewandt auf $T(E_{i-1}(\mathrm{R}))$ ergibt, daß g auch alle Relationen aus $E_i(\mathrm{R}) = E(T(E_{i-1}(\mathrm{R})))$ invariant läßt.

Erzeugendensysteme einer Struktur

Unter einem Erzeugendensystem einer Struktur $S = (A; R)$ verstehen wir eine zu R elementfremde Menge B von Relationen, derart daß alle Relationen über A aus $R \cup B$ ableitbar sind.

Betrachten wir die Struktur $S = (A$ =Menge der natürlichen Zahlen; $R = \{\sigma\})$ aus Beispiel 1). Da sich alle Elemente des Fundamentalbereichs aus der einzigen Relation σ ableiten lassen, ergibt sich allein schon aus Axiom A3), daß alle Relationen aus $R = \{\sigma\}$ ableitbar sind. Also bildet die leere Menge ein Erzeugendensystem der Struktur S.

Satz 5. Sei g ein Automorphismus der Struktur S und φ eine beliebige Relation, dargestellt in der Form $\varphi = F(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$ mittels einer logisch ableitbaren Funktion F. Dann folgt $g\,\varphi = F(g\,\alpha_1, g\,\alpha_2, \ldots, g\,\alpha_n)$.

Beweis: Es gibt eine ableitbare Relation χ, derart daß die folgenden beiden Aussagen äquivalent sind:

$$\psi = F(\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n) \text{ und } \vdash \chi(\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n, \psi).$$

Da χ ableitbar ist, bleibt χ unter g invariant. Daher sind nun auch die folgenden Aussagen untereinander äquivalent:

$$\vdash \chi(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_s, \varphi) \quad \text{und} \quad \vdash \chi(g\,\alpha_1, g\,\alpha_2, \ldots, g\,\alpha_n, g\,\varphi)$$

Daraus folgt $g\,\varphi = F(g\,\alpha_1, g\,\alpha_2, \ldots, g\alpha_n)$.

7. Die beiden Hauptsätze von Sebastião e Silva

Sei $S = (A; R)$ eine Struktur. Wir wollen annehmen, es gebe ein endliches Erzeugendensystem $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ von A bezüglich R. Mit ψ bezeichnen wir die irreduzible aus R ableitbare Relation, für welche $\vdash \psi(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$
(vgl. Satz 2, §4).

Ist φ eine beliebige s-stellige Relation, so läßt sie sich gemäß Satz 3, §5 durch eine logisch ableitbare Funktion F darstellen:

$$\varphi = F(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n).$$

Das Gleiche gilt auch, wenn φ ein beliebiges Element aus A ist.

In dem folgenden Satz beschreiben wir die Automorphismen der Struktur $S = (A; R)$ durch ihre Wirkung sowohl auf die Relationen beliebiger Stufen wie auf die Elemente von A.

Satz 6 (erster Hauptsatz von Sebastião e Silva). Die Automorphismen g der Struktur S entsprechen auf folgende Weise umkehrbar eindeutig den

Lösungen $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n$ der irreduziblen Relation ψ : eine beliebige Relation $\varphi = F(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$ wird auf die Relation
$g\varphi = F(\beta_1, \ \beta_2, \ldots, \beta_n)$ abgebildet, die sich in den Relationen $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n$ auf die analoge Weise ausdrücken läßt, wie φ in den Relationen $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$.

Beweis: Sei zunächst g ein Automorphismus der Struktur $S = (A; R)$. Nach Satz 5 ergibt sich, daß g die Relation $\varphi = F(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$ auf die durch einen analogen Ausdruck gebildete Relation $g\varphi = F(\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n)$ abbildet, wobei $\beta_i = g\alpha_i (i = 1, \ldots, n)$. Da g die Relation ψ invariant läßt, ist $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n$ eine Lösung von ψ, d.h. $\vdash \ \psi(\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n)$.

Nun müssen wir umgekehrt beweisen daß durch die angegebene Vorschrift auch stets ein Automorphismus der Struktur $S = (A; R)$ gegeben ist.

Im folgenden werden wir mehrfach von der Definition der logischen Ableitbarkeit Gebrauch machen. Wenn also $F(U_1, U_2, \ldots, U_n)$ eine logisch ableitbare Funktion ist und s die Stellenzahl des Ergebnisses, so bezeichne Ψ die $n + s$-stellige ableitbare Relation, so daß
$\vdash \ F(\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_n)[\psi_1, \psi_2, \ldots, \psi_s]$ dann und nur dann, wenn
$\vdash \ \Psi(\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_n, \psi_1, \psi_2, \ldots, \psi_s)$.

Ferner bezeichne χ die ableitbare Relation, so daß
$\vdash \ \varphi = F(\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_n)$ dann und nur dann, wenn
$\vdash \ \chi(\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_n, \varphi)$
Ist von zwei Funktionen F_1 und F_2 die Rede, so seien Ψ_1 und Ψ_2 bzw. χ_1 und χ_2 die entsprechenden Relationen.

Es muß zunächst bewiesen werden: die durch die Vorschrift
$F(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n) \to F(\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n)$ gegebene Abbildung ist wohldefiniert.

Wenn also die Relationen $F_1(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$ und $F_2(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$ übereinstimmen, so ist zu beweisen, daß auch $F_1(\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n)$ und $F_2(\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n)$ übereinstimmen.

Wäre das nicht der Fall, so könnten wir die folgende Formel Φ betrachten:

$$(\exists Z)[\chi_1(U_1, \ldots, U_n, Z) \wedge \chi_2(U_1, \ldots, U_n, Z)]$$

Sie definiert eine ableitbare Relation $\rho := \Phi | U_1, U_2, \ldots, U_n$ mit der Eigenschaft, daß

$$\vdash \ \rho(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n) \quad \text{aber} \dashv \quad \rho(\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n).$$

Dies widerspricht der Irreduzibilität der Relation ψ.

Wenn wir zeigen können, daß auch $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n$ ein Erzeugendensystem ist, so sind alle Annahmen über die Lösungstupel $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$ und $(\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n)$ symmetrisch und die beiden Lösungstupel können vertauscht werden. D.h. die oben definierte Abbildung g hat
$F(\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n) \to F(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$ als Inverse. Sie ist somit bijektiv.

Um zu zeigen, daß $\beta_1, \beta_2 \ldots, \beta_n$ ein Erzeugendensystem ist, genügt es zu zeigen, daß jedes Element φ eine Darstellung in der Form $\varphi = F(\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n)$ mit Hilfe einer logisch ableitbaren Funktion F zuläßt. Sei p die Stufe von φ und seien $p_1, p_2, \ldots, p_n$ die Stufen der Elemente $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$. Wir betrachten die Relation σ mit der Definition:

$\vdash \sigma(\chi)$ dann und nur dann, wenn folgende Bedingungen erfüllt sind:

1. χ ist ableitbar vom Typ $(p_1, p_2, \ldots, p_n, p)$,
2. aus $\vdash \chi(\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_n, \varphi_1)$ für irgendein φ_1 folgt $t(\gamma_1) = t(\alpha_1)$, $t(\gamma_2) = t(\alpha_2)$ usw.,
3. zu $\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_n$ mit $t(\gamma_1) = t(\alpha_1), t(\gamma_2) = t(\alpha_2)$ usw. gibt es genau ein φ_1 mit

$$\vdash \chi(\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_n, \varphi_1).$$

Die Relation σ ist ableitbar, da alle Lösungen es sind. Zu jeder Lösung χ gehört eine logisch ableitbare Funktion F.

Sei X eine Prädikatvariable vom Typ $(p_1, p_2, \ldots, p_n, p)$, sei Z eine zu φ passende Variable und seien $U_1, U_2, \ldots, U_n$ Variable, die zu $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_n$ passen. Dann können wir die folgende Formel Φ bilden:

$$(\forall Z)(\exists X)[\sigma(X) \wedge X(U_1, U_2, \ldots, U_n, Z)]$$

Sei $\rho := \Phi | U_1, U_2, \ldots, U_n$. Die Relation ρ ist ableitbar und es gilt $\vdash \rho(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$.

Denn sei $Z \to \varphi_1$ eine zulässige Substitution. Dann gibt es eine logisch ableitbare Funktion F mit $\varphi_1 = F(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$. Zu F gehört aber eine ableitbare Relation χ mit
$\vdash \sigma(\chi)$ und $\vdash \chi(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n, \varphi_1)$. Da also die Aussage $\sigma(\chi) \wedge \chi(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n, \varphi_1)$ wahr ist folgt die Behauptung $\vdash \rho(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$.

Nun folgt auch $\vdash \rho(\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n)$. Da wir für Z die gegebene Relation φ einsetzen können, muß es ein χ geben, so daß $\vdash \sigma(\chi)$ und $\vdash \chi(\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n, \varphi)$. Zu χ gehört eine logisch ableitbare Funktion F mit $\varphi = F(\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n)$.

Damit ist bewiesen, daß $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n$ ein Erzeugendensystem ist, und somit ist die Abbildung g bijektiv.

Die Abbildung g ist insbesondere auch auf dem Fundament A definiert. Aus der Definition der logisch ableitbaren Funktionen ergibt sich, daß g für jedes Element β den Typ $t(\beta)$ erhält, d.h. daß $t(\beta) = t(g(\beta))$. Daraus folgt, daß g das Fundament A und jede der Mengen $R_1(A)$, $R_2(A)$ usw. in sich abbildet. Da g insgesamt bijektiv ist, so ist also auch die Restriktion $g|_A$ auf der Menge A bijektiv. Es bedarf aber noch eines Beweises, daß die Abbildung g die Menge $T = A \cup R_1(A) \cup R_2(A) \cup \cdots$ in sich kohärent abbildet, d.h. daß g mit der Abbildung übereinstimmt, die von $g|_A$ induziert würde. Bezeichnen wir der Deutlichkeit halber die induzierte Abbildung durch $(g|_A)^*$, so muß also $g = (g|_A)^*$ gelten. Zum Beweis dient der folgende Hilfssatz:

(7.1) Sei $g : T \to T$ eine bijektive Abbildung mit der Eigenschaft $t(\beta) = t(g(\beta))$ für alle $\beta \varepsilon T$. Die Abbildung g stimmt mit der von $g|_A$ in der Menge T induzierten Abbildung überein, wenn g alle Relationen μ_t der Form $\mu_t := X_0(X_1, X_2, \ldots, X_s)|_{X_0, X_1, \ldots, X_s}$ invariant läßt.

Zum Beweis von (7.1) zeigen wir durch Induktion nach der Stufe n, daß $g(\beta) = (g|_A)^*(\beta)$ für alle $\beta \varepsilon R_n(A)$.

Für $n = 0$, also für $\beta \varepsilon A = R_0(A)$ ist das trivialerweise der Fall.

Angenommen, die Aussage $g(\varphi) = (g|_A)^*(\varphi)$ sei für alle φ der Stufe $<n$ bewiesen. Sei nun β eine s-stellige Relation aus $R_n(A)$. Es ergibt sich:

$\vdash \beta(\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_s)$ dann und nur dann, wenn
$\vdash \mu_t(\beta, \varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_s)$ dann und nur dann, wenn
$\vdash \mu_t(g(\beta), g(\varphi_1), g(\varphi_2), \ldots, g(\varphi_s))$ dann und nur dann, wenn
$\vdash g(\beta)[g(\varphi_1), g(\varphi_2), \ldots, g(\varphi_s)]$.

Nun ist $g(\varphi_1) = (g|_A)^*(\varphi_1), g(\varphi_2) = (g|_A)^*(\varphi_2)$, usw.. Daraus folgt $g(\beta) = (g|_A)^*(\beta)$ und 7.1) ist bewiesen.

Es bleibt zu beweisen, daß die Abbildung g alle Relationen der Form $X_0(X_1, X_2, \ldots, X_s)|_{X_0, X_1, \ldots, X_s}$ invariant läßt.

Angenommen $\vdash \varphi_0(\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_s)$ aber $\dashv g\varphi_0(g\varphi_1, g\varphi_2, \ldots, g\varphi_s)$.

Ob nun $\varphi_0, \varphi_1, \ldots, \varphi_s$ sämtlich Relationen der Stufe >0 sind oder ob unter ihnen Elemente aus A vorkommen, so sind sie jedenfalls durch logische Funktionen $F_i(U_1, U_2, \ldots, U_n)$ gegeben, so daß also zum Beispiel $\varphi_0 = F_0(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$ und $g\varphi_0 = F_0(\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n)$ usw.

Nach Definition gibt es ableitbare Relationen $\chi(i = 1, 2, \ldots, s)$ mit der Eigenschaft

$\vdash \chi_i(\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_n, \varphi)$ dann und nur dann, wenn
$\varphi = F_i(\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_n)$.

Betrachten wir nun die Formel Θ:

$$(\exists X_0, X_1, \ldots, X_s)(X_0(X_1, \ldots, X_s)) \wedge \chi_0(U_1, \ldots, U_n, X_0)$$
$$\wedge \cdots \wedge \chi_s(U_1, \ldots, U_n, X_s)$$

Sie definiert eine ableitbare Relation $\theta := \Theta|_{U_1,U_2,\dots,U_n}$ und es ergibt sich der Widerspruch

$$\vdash \theta(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) \quad \text{aber} \quad \dashv \theta(\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n).$$

Angenommen $\dashv \varphi_0(\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_s)$ aber $\vdash g\varphi_0(g\varphi_1, g\varphi_2, \dots, g\varphi_s)$, so ergäbe sich auf ähnliche Weise der Widerspruch $\dashv \theta(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$ aber $\vdash \theta(\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n)$.

Hieraus folgt nun, daß die Abbildung g die Menge aller Relationen in sich kohärent abbildet. Sie ist also identisch mit der Abbildung, die durch $g|_A$ induziert würde.

Die Abbildung g läßt auch alle Relationen aus der Menge R invariant. Denn einer s-stelligen Relation φ aus der Menge R entspricht eine logisch ableitbare Funktion $F(U_1, \dots, U_n) = \varphi$.

Daher bleibt die Relation φ unter der Abbildung g invariant und g ist ein Automorphismus der Struktur S.

Der zweite Hauptsatz von Sebastião e Silva entspricht dem Hauptsatz von Krasner. Auch beim Beweis dieses Satzes werden wir zunächst die Existenz eines endlichen Erzeugendensystems $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ der Struktur $S = (A; R)$ annehmen. Im nächsten Abschnitt werden wir sehen, daß diese Annahme in Wirklichkeit keine Einschränkung bedeutet.

Satz 7 (zweiter Hauptsatz von Sebastião e Silva). Notwendig und hinreichend dafür, daß eine Relation φ unter allen Automorphismen einer Struktur $S = (A; R)$ festbleibt, ist die Bedingung, daß φ ableitbar ist.

Beweis: Daß die Bedingung hinreichend ist, haben wir bereits bewiesen (vgl. Satz 4, §6). Es muß also nur noch gezeigt werden, daß sie auch notwendig ist. Sei also φ eine unter allen Automorphismen g von S invariante Relation. Sei ψ die irreduzible aus R ableitbare Relation mit der Eigenschaft $\vdash \psi(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$. Die Bilder von φ unter Automorphismen g der Struktur S haben nach dem ersten Hauptsatz die Form

$$g\varphi = F(\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n).$$

Dabei ist $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n$ eine beliebige Lösung von ψ and F eine logisch ableitbare Funktion der Variablen $U_1, U_2, \dots, U_n$. Sei Ψ die gemäß Definition existierende zu F gehörige $n+s$-stellige ableitbare Relation und betrachten wir die Formel
$\psi(U_1, \dots, U_n) \wedge \Psi(U_1, \dots, U_n, X_1, \dots, X_s)$. Jede zulässige Substitution $U_1 \to \beta_1, U_2 \to \beta_2$ usw. liefert nun entweder die leere Relation oder

eine Relation $g\,\varphi$. Da nun nach Voraussetzung $g\varphi$ für alle Automorphismen g gleich φ ist, so folgt $\varphi :=$

$$(\exists U_1, U_2, \ldots, U_n)[\psi(U_1, \ldots, U_n) \\ \wedge\, \Psi(U_1, \ldots, U_n, X_1, \ldots, X_s)]|_{X_1, X_2, \ldots, X_s}.$$

Damit ist die Ableitbarkeit von φ bewiesen.

Korollar 1. Notwendig und hinreichend dafür, daß eine Funktion

$$F : R_{t_1} \times R_{t_2} \times \ldots \times R_{t_n} \to R_t$$

für alle Automorphismen g der Struktur $S = (A; R)$
die Funktionalgleichung

$$(^*)\ g(F(U_1, U_2, \ldots, U_m)) = F(g(U_1), g(U_2), \ldots, g(U_m))$$

erfüllt, ist die Bedingung, daß F logisch ableitbar ist.

Beweis: Wenn F logisch ableitbar ist, so folgt sofort aus Satz 5, §6, daß F die Funktionalgleichung $(^*)$ für alle Automorphismen g erfüllt.

Nehmen wir nun umgekehrt an, die Funktionalgleichung $(^*)$ sei für alle Automorphismen g der Struktur S erfüllt. Wir betrachten die Relation χ mit $\vdash \chi(\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_m, \varphi)$ dann und nur dann, wenn $\varphi = F(\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_m)$.

Aus der Gültigkeit der Gleichung $(^*)$ für alle Automorphismen folgt, daß $g(\varphi) = F(g(\gamma_1), g(\gamma_2), \ldots, g(\gamma_m))$ für ein beliebiges g gleichwertig ist mit $\varphi = F(\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_m)$. Daher bleibt die Relation χ unter allen Abbildungen g invariant. Nach Satz 7 ist also χ eine ableitbare Relation und damit ist F eine logisch ableitbare Funktion.

Korollar 2. Sei $F = F(U_1, U_2, \ldots, U_n)$ eine logisch ableitbare Funktion, deren Argumente $U_1, U_2, \ldots$ die Mengen R_{t_1}, R_{t_2} usw. durchlaufen. Seien $G_1(V_1, \ldots, V_m)$, $G_2(V_1, \ldots, V_m), \ldots$ logisch ableitbare Funktionen mit Ergebnis in R_{t_1}, R_{t_2} usw.. Dann ist auch die Funktion H mit $H(V_1, V_2, \ldots, V_m) = F(G_1(V_1, V_2, \ldots, V_m)), G_2(V_1, V_2, \ldots, V_m)$, $\ldots$, $G_n(V_1, V_2, \ldots, V_m))$ eine logisch ableitbare Funktion.

Beweis: Es genügt, sich zu vergewissern, daß H für beliebige Automorphismen der Struktur S = *(A; R)* die Funktionalgleichung $(^*)$ erfüllt. Sei also g ein beliebiger Automorhismus. Da F und $G_1, G_2, \ldots, G_n$ die

Funktionalgleichung $(^*)$ für g erfüllen, so folgt

$$g(H(V_1, V_2, \ldots, V_m)) = g(F(G_1(V_1, V_2, \ldots, V_m),$$
$$G_2(V_1, V_2, \ldots, V_m), \ldots, G_n(V_1, V_2, \ldots, V_m)) =$$
$$F(g(G_1(V_1, V_2, \ldots, V_m)), g(G_2(V_1, V_2, \ldots, V_m)), \ldots,$$
$$g(G_n(V_1, V_2, \ldots, V_m))) =$$
$$F(G_1(g(V_1), g(V_2), \ldots, g(V_m)), G_2(g(V_1), g(V_2), \ldots, g(V_m)),$$
$$\ldots, G_n(g(V_1), g(V_2), \ldots, g(V_m)) =$$
$$H(g(V_1), g(V_2), \ldots, g(V_m)).$$

Ähnlich wie in Kapitel II nennen wir zwei Strukturen $S_1 = (A; R_1)$ und $S_2 = (A; R_2)$ über demselben Fundament A äquivalent, wenn in beiden Strukturen dieselben Relationen ableitbar sind.

Korollar 3 (Äquivalenzprinzip). Zwei Strukturen $S_1 = (A; R_1)$ und $S_2 = (A; R_2)$ sind genau dann äquivalent, wenn sie dieselbe Automorphismengruppe haben.

Beweis: Sei G die Automorphismengruppe von S_1 und auch von S_2. Dann stimmen nach dem zweiten Hauptsatz die ableitbaren Relationen von S_1 und von S_2 mit den invarianten Relationen von G überein. Also sind S_1 and S_2 äquivalent.

Nehmen wir nun umgekehrt an, S_1 und S_2 seien äquivalent und betrachten wir einen Automorphismus g von S_1. Dann läßt g alle ableitbaren Relationen von S_1 invariant, folglich auch alle ableitbaren Relationen von S_2 und folglich auch die definierenden Relationen von S_2. Somit ist jeder Automorphismus von S_1 auch ein Automorphismus von S_2 und jeder Automorphismus von S_2 auch ein Automorphismus von S_1.

8. Wohlordnungen auf Teilmengen

Der Zweck dieses Abschnitts ist zu zeigen, daß die Annahme der Existenz eines endlichen Erzeugendensystems für die Struktur $S = (A; R)$, die wir im vorigen Abschnitt benötigt haben, in Wirklichkeit keine Einschränkung bedeutet.

Die Grundidee, wie wir dabei vorgehen wollen, ist ganz einfach. Wir betrachten ein beliebiges Erzeugendensystem $\alpha_1, \alpha_2, \ldots,$ das auch unendlich sein kann, von dem wir aber annehmen wollen, daß es nur Elemente einer bestimmten festen Stufe enthalte. Wenn wir dann genügend viele ableitbare Elemente $\nu_1, \nu_2, \ldots$ einer festen Stufe finden können, so können wir eine umkehrbar eindeutige Abbildung $v_1 \rightarrow \alpha_1$,

$\nu_2 \to \alpha_2$ usw. als binäre Relation φ darstellen. Dann lassen sich aus der Relationenmenge R vereinigt mit dem einzigen Element φ alle Elemente $\alpha_1, \alpha_2, \ldots$ des Erzeugendensystems ableiten. Denn zu jedem der ableitbaren Elemente ν_i gibt es auch eine ableitbare einstellige Relation $\nu_i^{\uparrow}$ der nächsthöheren Stufe, die gerade dieses Element bestimmt. Dann ist aber $(\exists X)[\varphi(X, Y) \wedge \nu_i^{\uparrow}(X)]$ eine Formeldarstellung für eine Relation, die das Element α_i bestimmt. Man sieht also, daß φ ein aus einem einzigen Element bestehendes Erzeugendensystem der Struktur $S = (A; R)$ ist.

Um nun ableitbare Elemente in genügender Anzahl zu bekommen, wollen wir zeigen, daß jeder Ordnungszahl einer wohlgeordneten Teilmenge von A auf natürliche Weise ein ableitbares Element der Stufe 2 entspricht und daß verschiedene Ordnungstypen dabei unterschiedlichen Elementen zugeordnet sind.
Eine Teilmenge U von A wird dargestellt durch eine einstellige Relation ζ der Stufe 1.
$\vdash \zeta(b)$ dann und nur dann, wenn $b \,\varepsilon U$.
Eine Wohlordnung der Teilmenge U ist eine zweistellige Relation ω mit den Eigenschaften:

i) aus $\vdash \omega(a, b)$ folgt $\vdash \zeta(a)$ und $\vdash \zeta(b)$,
ii) für a, b mit $\vdash \zeta(a)$, $\vdash \zeta(b)$ ist entweder $a = b$ oder $\vdash \omega(a, b)$ oder $\vdash \omega(b, a)$,
iii) aus $\vdash \omega(a, b)$ und $\vdash \omega(b, c)$ folgt $\vdash \omega(a, c)$,
iv) repräsentiert die einstellige Relation η eine nichtleere Untermenge V von U, so gibt es in der Untermenge V ein erstes Element bezüglich der Anordnung:

$$(\exists X_0)[\eta(X_0) \wedge (\forall X_1)[\eta(X_1) \to (X_0 = X_1 \wedge \omega(X_0, X_1))]]$$

Es stellt sich die Aufgabe, diese vier Eigenschaften durch ableitbare Relationen auszudrücken. Seien U, V Variable, die geeignet sind Untermengen der Menge A darzustellen, d.h. Prädikatvariable der Stufe und Stellenzahl 1. Es sei W eine Prädikatvariable der Stufe 1 und Stellenzahl 2 und schließlich seien X, X_0, X_1, Y und Z Individuenvariable der Stufe 0, die also für Elemente von A stehen. Wenn wir uns die Wohlordnung ω durch die Variable W vertreten denken, so lassen sich die obigen vier Eigenschaften folgendermaßen umformulieren:

i) $(\forall X, Y)[W(X, Y) \to (U(X) \wedge U(Y))]$
ii) $(\forall X, Y)[(U(X) \wedge U(Y)) \to (X = Y \oplus W(X, Y) \oplus W(Y, X))]$
wobei $\oplus$ die Operation des exklusiven Oder bezeichnet,
iii) $(\forall X, Y, Z)[(W, (X, Y) \wedge W(Y, Z)) \to W(X, Z)]$
iv) $(\forall V)[((\forall Z)[V(Z) \to U(Z)] \wedge (\exists Z) V(Z)) \to$
$(\exists X_0)[V(X_0) \wedge (\forall X_1)[V(X_1) \to (X_0 = X_1 \vee W(X_0, X_1))]]$

Bezeichnen wir der Reihe nach diese vier Formeln durch $\Phi_1(U, W)$, $\Phi_2(U, W)$, $\Phi_3(W)$, und $\Phi_4(U, W)$, so erhalten wir mit

$$\Phi_1(U, W) \wedge \Phi_2(U, W) \wedge \Phi_3(W) \wedge \Phi_4(U, W)$$

eine Formel Φ, die ausdrückt, daß W eine Wohlordnung über der Teilminge U von A ist.

Ersetzt man die Formel $\Phi = \Phi(U, W)$ durch $(\exists U)\Phi(U, W)$, so läßt sich aus der Relation $\tau := (\exists U)\Phi(U, W)|_W$ die Relation $\sigma := \Phi|_{U,W}$ rekonstruieren. Dazu benötigen wir folgende Formel Ψ:

$$\begin{aligned}&\tau(W) \wedge (\forall X, Y)[W(X, Y) \rightarrow (U(X) \wedge U(Y))]\wedge\\ &\qquad (\forall X, Y)[U(X) \wedge U(Y)) \rightarrow (X = Y \wedge W(X, Y) \wedge W(Y, X))]\end{aligned}$$

Die Relationen $\sigma := \Phi|_{U,W}$ und $\Psi|_{U,W}$ stimmen überein, da es zu einem λ mit $\vdash \sigma(\zeta, \lambda)$ nur ein ζ mit dieser Eigenschaft gibt.

Wann sind nun zwei Wohlordnungen äquivalent ?
Dazu benötigen wir als erstes den Begriff einer bijektiven Abbildung zwischen Teilmengen der Menge A.

Daß μ (repräsentiert durch die Variable T) eine bijektive Beziehung zwischen U und $U1$ vermittelt, läßt sich folgendermaßen durch eine Formel B ausdrücken:

$$\begin{aligned}&(\forall X, X_1)[(T(X, X_1) \rightarrow (U(X) \wedge U_1(X_1))]\wedge\\ &(\forall X, X_1, X_2)[(T(X, X_1) \wedge T(X, X_2)) \rightarrow X_1 = X_2]\wedge\\ &(\forall X, X_1, X_2)[(T(X_1, X) \wedge T(X_2, X)) \rightarrow X_1 = X_2]\wedge\\ &(\forall X)[U(X) \rightarrow (\exists X_1)T(X, X_1)]\wedge\\ &(\forall X_1)[U_1(X_1) \rightarrow (\exists X)T(X, X_1)]\end{aligned}$$

Es sei $\beta := B|_{T,U,U_1}$. Worauf es hier stets ankommt, ist die Ableitbarkeit der Relation ganz unabhängig von der aktuell gegebenen Struktur. (β wäre also auch in der trivialen Struktur ableitbar).

Die Äquivalenz zweier Wohlordnungen, repräsentiert durch die Variablen W, W_1, ergibt sich nun wie folgt:

$$\begin{aligned}&(\exists T, U, U_1)[\sigma(U, W) \wedge \sigma(U_1, W_1) \wedge \beta(T, U, U_1)\wedge\\ &\quad (\forall X, X_1, Y, Y_1)[(W(X, Y) \wedge T(X, X_1)\\ &\qquad \wedge T(Y, Y_1)) \rightarrow W_1(X_1, Y_1)]\wedge\\ &\quad (\forall X, X_1, Y, Y_1)[(W_1(X_1, Y_1) \wedge T(X, X_1)\\ &\qquad \wedge T(Y, Y_1)) \rightarrow W(X, Y)]]\end{aligned}$$

Die durch diese Formel E dargestellte Relation $E|_{W,W_1}$ sei mit dem Buchstaben ρ bezeichnet. Da sie sich auf Argumente der Stufe 1 bezieht, hat sie Stufe 2. Das, worauf es ankommt, ist aber wieder die Ableitbarkeit der Relation ρ, die offensichtlich gegeben ist.

Im allgemeinen kann man nicht erwarten, daß für eine beliebige ableitbare Äquivalenzrelation auch die zugehörigen Klassen durch ableitbare Relationen gegeben sind. Wir haben also noch die Aufgabe die einzelnen Klassen zur Relation ρ als ableitbar aufzuweisen.

Dazu sind drei Schritte nötig:

1) der Beweis, daß die Ordnungszahl der leeren Menge als ableitbare Relation gegeben ist,
2) der Beweis, daß für jede bereits als ableitbar erkannte Ordnungszahl auch die nachfolgende Ordnungszahl als ableitbare Relation gegeben ist,
3) der Beweis, daß eine beliebige Limeszahl als ableitbare Relation gegeben ist, wenn für alle kleineren Ordnungszahlen bereits ableitbare Relationen gefunden sind.

Zu 1). Ist W eine Prädikatvariable der Stufe 1 und des Typs $t = (0, 0)$, ferner U eine Prädikatvariable der Stufe 1 und des Typs $t = (0)$ und X eine Variable der Stufe 0, so stellt die Formel $(\exists U)[\sigma(U, W) \wedge \neg(\exists X)(U(X))]$ die Äquivalenzklasse der Wohlordnungen der leeren Menge dar.
Zu 2). Es sei γ die Relation mit der Bedeutung $\vdash \gamma(\mu, \mu_1, a)$ dann und nur dann, wenn μ_1 die einelementige Erweiterung der Menge μ um das Element a darstellt.

Sind U, U_1 Prädikatvariable vom Typ (0) und sind X, Y gewöhnliche Variable der Stufe 0, so ist $\gamma := \Phi|_{U,U_1,X}$ für die folgende Formel Φ:

$$\neg U(X) \wedge U_1(X) \wedge (\forall Y)[(\rightarrow U_1 U(Y)_1(Y)) \\ \wedge (U_1(Y) \rightarrow (U(Y) \vee Y = X))].$$

Nehmen wir nun an, die Ordnungszahl ν sei durch eine ableitbare Relation φ_ν gegeben. Betrachten wir die folgende Formel Ψ:

$$(\exists W, U)[\varphi_\nu(W) \wedge \sigma(U, W) \wedge (\exists U_1, X)[\gamma(U, U_1, X) \wedge \\ \sigma(U_1, W_1) \wedge (\forall Y)[U(Y) \rightarrow W_1(Y, X)]]]$$

Die Relation $\varphi_{\nu+1} := \Psi|_{W_1}$ definiert dann die Äguivalenzklasse der nächsten Ordnungszahl $\nu + 1$. Da in der Formel Ψ nur Prädikate für ableitbare Relationen auftreten, ist $\varphi_{\nu+1}$ ableitbar.
Zu 3). Dies ist von den drei Schritten der komplizierteste. Sei N die Menge der bereits durch ableitbare Relationen gegebenen Ordnungszah-

len ν und sei M die Menge der entsprechenden ableitbaren Relationen φ_ν. Wir nehmen an, N habe kein letztes Element.

Zur Konstruktion der Limeszahl, die auf die Ordnungszahlen der Menge N folgt, benötigen wir ein System kohärenter Repräsentanten für die Ordnungszahlen $\nu \varepsilon N$. Damit ist eine Funktion g von M in die Menge der Wohlordnungen gemeint, welche die folgenden Eigenschaften hat:

i) $\omega_\nu = g(\varphi_\nu)$ gehört der Klasse φ_ν an für alle $\varphi_\nu \varepsilon M$,
ii) ist $\nu < \nu_1$, so ist $\omega_\nu = g(\varphi_\nu)$ ein Anfangsabschnitt von $\omega_{\nu_1} = g(\varphi_{\nu_1})$

Zur formalen Konstruktion einer solchen Funktion g benötigen wir Relationen χ, ψ, o und α wie folgt:
$\vdash\ \chi(\varphi)$ bedeutet, daß φ eine der Klassen aus M ist,
$\vdash\ \psi(\beta)$ bedeutet, daß β eine Abbildung g mit den Eigenschaften (i) und (ii) vermittelt,
$\vdash\ o(\varphi_{\nu_1}, \varphi_{\nu_2})$ bedeutet dasselbe wie $\nu_1 < \nu_2$ für die entsprechenden Ordnungszahlen,
$\vdash\ \alpha(\omega_1, \omega_2)$ bedeutet, daß ω_1 ein Anfangsabschnitt der Wohlordnung ω_2 ist.

Betrachten wir folgende Formel Ψ:

$$(\forall R)[\chi(R) \rightarrow (\exists W)G(R, W)] \wedge$$
$$(\forall R, W)[G(R, W) \rightarrow (\chi(R) \wedge R(W))] \wedge$$
$$(\forall R, W, W_1)[(G(R, W) \wedge G(R, W_1)) \rightarrow W = W_1] \wedge$$
$$(\forall R, R_1, W, W_1)[(G(R, W) \wedge G(R_1, W_1) \wedge o(R, R_1)) \rightarrow \alpha(W, W_1)]$$

Sie drückt aus, daß G eine Abbildung g mit den Eigenschaften (i) und (ii) vermittelt. Wir können also $\psi := \Psi|G$ setzen.

Die gesuchte Limeszahl erhalten wir nun durch folgende Formel Λ:

$$(\exists G)[\psi(G) \wedge (\forall X, Y)[W(X, Y) \equiv (\exists R_1, W_1)(G(R_1, W_1) \wedge W_1(X, Y))]]$$

Da in der Formel Ψ nur die χ, o und α entsprechenden Prädikate vorkommen, genügt es, sich zu vergewissern, daß χ, o und α ableitbare Relationen sind. Für χ und o folgt das sofort aus der Definition. Denn diese beiden Relationen haben nach Definition nur ableitbare Lösungen. Daß auch die Relation α ableitbar ist, erkennt man daraus, daß sie sich durch folgende Formel A darstellen läßt:

$$\tau(W_2) \wedge (\forall X, Y)[W_1(X, Y) \rightarrow W_2(X, Y)] \wedge$$
$$(\forall X, Y)[[W_2(X, Y) \wedge (\exists Z)(W_1(Z, Y) \vee W_1(Y, Z))] \rightarrow W_1(X, Y)]$$

Es gilt $\alpha := A|_{W_1, W_2}$ und somit ist α ableitbar.

IV. Beispiele und Anwendungen der Theorie von Sebastião e Silva

1. Endliche Strukturen

In diesem und dem folgenden Abschnitt betrachten wir Strukturen mit endlichem Fundament. Eine Struktur $S = (A; R)$ mit endlichem Fundament A wird endliche Struktur genannt.

Wir wollen nun die Beziehungen zwischen den in Kapitel *I* untersuchten endlichen Strukturen und den endlichen Strukturen im Sinne von Sebastião e Silva etwas näher betrachten. Sei also $S = [A; \varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_r]$ eine Struktur im Sinne von Kapitel *I*. Wir können S auch als Struktur im Sinne von Sebastião e Silva auffassen und schreiben dann zur Unterscheidung runde Klammern, also $S = (A; R)$, wobei $R = \{\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_r\}$. Das Umgekehrte ist nicht immer möglich. Damit eine Struktur $S = (A; R)$ im Sinne von Sebastião e Silva sich auch als Struktur im Sinne von Kapitel *I* interpretieren läßt, müssen wir voraussetzen, daß R nur endlich viele Relationen der Stufe 1 enthält. Solche Strukturen nennen wir einstufig und endlich definiert.

Ähnlich wie in Kapitel III wollen wir auch für endliche Strukturen im Sinne von Kapitel I den Ableitbarkeitsbegriff auf Elemente der Menge A ausdehnen. Ein Element $a \in A$ wird also genau dann als ableitbar angesehen, wenn die entsprechende Relation $a^{\uparrow}$ableitbar ist, die als einzige Lösung das Element a zuläßt. Um eine bessere Entsprechung zwischen den beiden Arten von endlichen Strukturen zu erreichen, wollen wir nun auch zulassen, daß unter den die Struktur definierenden Elementen $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_r$ auch Elemente der Menge A vorkommen. Da für die Ableitbarkeit im Sinne von Kapitel I nichts dem Postulat A3) entsprechendes zur Verfügung steht, ist es noch nötig sich Gedanken darüber zu machen, wie Relationen aus Elementen der Menge A abgeleitet werden können.

Dazu erweitern wir den einstufigen Prädikatenkalkül um Konstante aus der Menge A. Dann werden Ausdrücke wie *z.B.* $X = c$ oder $\varphi(X, c)$ zu zulässigen Formeln. Ist nun c eines der definierenden Elemente, so liefert die Interpretation der Formel $X = c$ die einstellige Relation $c^{\uparrow}$ und wir betrachten dann $c^{\uparrow}$ als ableitbar. Es ist nicht schwierig, sich zu überzeugen, daß mit dieser Erweiterung des Struktur- und des Ableitbarkeitsbegriffs der Satz von Krasner gültig bleibt. Und zwar gilt er nun sogar auch für Elemente aus A.

Unter einer endlichen Struktur $S = [A; \varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_r]$ wollen wir von jetzt ab eine Struktur im Sinne von Kapitel I mit der möglichen

Erweiterung um definierende Konstante verstehen. Unter Ableitbarkeit im Sinne der Prädikatenlogik erster Stufe wollen wir die erörterte Erweiterung des Ableitbarkeitsbegriffs von Kapitel I verstehen. Der Gedankengang zum Beweis des Satzes von Krasner in der erweiterten Form soll noch kurz skizziert werden:
Wenn unter den definierenden Elementen $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_r$ Konstante c_i aus A vorkommen, ersetzen wir diese durch die entsprechenden Relationen $c_i^{\uparrow}$. Die so erhaltene Struktur S^* hat dieselbe Automorphismengruppe wie S. Für S^* gilt der Satz von Krasner in der in Kapitel I bewiesenen Form. Nun ist ein Element $c \in A$ genau dann ableitbar, wenn die Relation $c^{\uparrow}$ ableitbar ist, und c bleibt genau dann unter allen Automorphismen invariant, wenn $c^{\uparrow}$ invariant bleibt. Somit gilt der Satz von Krasner auch in dem erweiterten Sinn.

Wir benötigen die folgenden beiden Hilfssätze. Der Beweis des ersten von beiden ist trivial.
(1.1) Jeder Automorphismus der endlichen Struktur
$S = [A; \varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_r]$ ist auch Automorphismus der Struktur
$S = (A; \{\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_r\})$ im Sinne von Sebastião *e* Silva und umgekehrt.
(1.2) Sei $R = \{\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_r\}$ eine endliche Menge von Relationen der Stufe 1 über A. Die folgenden Aussagen über eine Relation φ der Stufe 1 über A sind äquivalent:

(i) φ ist aus der Relationenmenge $R = \{\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_r\}$ ableitbar im Sinne der Prädikatenlogik erster Stufe,
(ii) φ ist aus der Relationenmenge $R = \{\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_r\}$ ableitbar im Sinne von Kapitel III.

Beweis: Aussage (i) ist gleichwertig damit, daß φ unter den Automorphismen der Struktur S invariant bleibt, den Begriff Automorphismus dabei wie in Kapitel I verstanden.

Aussage (ii) ist gleichwertig damit, daß φ ebenfalls unter allen Automorphismen der Struktur S invariant bleibt, den Begriff Automorphismus wie in Kapitel III verstanden.

Nach Hilfssatz (1.1) stimmen die beiden Automorphismusbegriffe überein, folglich sind die Aussagen (i) und (ii) äquivalent.

In diesem Abschnitt haben wir es mit drei verschiedenen Begriffen von Ableitbarkeit zu tun, die sich in den folgenden Aussagen über eine Relation φ der Stufe 1 wiederfinden:

(a1) φ ist ableitbar im Sinn der Prädikatenlogik erster Stufe,
(a2) φ ist elementar ableitbar,
(a3) φ ist ableitbar im allgemeinen Sinne von Kapitel III.

Als Resultat unserer Betrachtungen ergibt sich:

Satz 1. Sei $S = (A; \{\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_r\})$ eine einstufig und endlich definierte endliche Struktur im Sinne von Sebastião *e* Silva. Dann sind für jede Relation φ der Stufe ≤ 1 die Aussagen (a1)–(a3) äquivalent.

Beweis: Im allgemeinen gelten die Implikationen (a1) $\rightarrow$ (a2) und (a2) $\rightarrow$ (a3). Es ist also noch zu zeigen, daß in der speziellen Situation des Satzes 1 auch die Implikation (a3) $\rightarrow$ (a1) gilt.

Wenn φ ableitbar ist im Sinne von Kapitel III, so bleibt φ invariant unter allen Automorphismen im Sinne von Sebastião e Silva. Diese stimmen überein mit den Automorphismen im Sinne von Kapitel I. Nach dem Satz von Krasner in der oben erörterten erweiterten Form ist φ also ableitbar im Sinne der Prädikatenlogik erster Stufe.

2. Der erste Hauptsatz von Sebastião e Silva für endliche Strukturen

Der erste Hauptsatz von Sebastião e Silva läßt sich in einfacher Weise in die Situation und Sprache des Kapitels I übertragen. Dabei sind jedoch die in §1 erörterten Modifikationen zu berücksichtigen. Sei A wie in Kapitel I eine endliche Menge, seien $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_r$ Relationen der Stufe 1 über A. Wir betrachten wie in §1 die endliche Struktur $S = [A, \varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_r]$.

Definition. Eine Funktion $F : A \times A \times \ldots \times A \rightarrow A$ heißt bezüglich der einstufigen Prädikatenlogik ableitbar, wenn es eine im Sinne der einstufigen Prädikatenlogik ableitbare Relation χ gibt mit der Eigenschaft: $\vdash \chi(b_1, b_2, \ldots, b_n, b)$ dann und nur dann, wenn $b = F(b_1, b_2, \ldots, b_n)$.

Aus Hilfssatz (1.2) ergibt sich sofort:

(2.1) Eine Funktion $F : A \times A \times \ldots \times A \rightarrow A$ ist genau dann bezüglich der einstufigen Prädikatenlogik ableitbar, wenn sie logisch ableitbar ist im Sinne von Kapitel III.

Wählen wir nun ein endliches Erzeugendensystem $a_1, a_2, \ldots, a_s$ der Struktur S. Diesen Begriff haben wir nur in Kapitel III eingeführt, er ist also zunächst wie in Kapitel III zu verstehen. Es ist leicht einzusehen, daß die Menge A in jeder Struktur im Sinne von Sebastião e Silva ein Erzeugendensystem bildet. Wenn A also endlich ist, gibt es endliche Erzeugendensysteme, und wir können eines auswählen. Es sei daran erinnert, was dies bedeutet: jede Relation (beliebiger Stufe) und jedes Element aus A ist aus der Menge $\{\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_r\} \cup \{a_1, a_2, \ldots, a_s\}$ ableitbar im Sinne von Kapitel III. Also ist auch jede Relation der Stufe 1 und jedes Element aus A aus der Menge $\{\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_r\} \cup \{a_1, a_2, \dots, a_s\}$ ableitbar im Sinne der einstufigen Prädikatenlogik, wie in §1 erörtert.

Es sei nun ψ die irreduzible ableitbare Relation mit $\vdash \psi(a_1, a_2, \dots, a_s)$. Ferner sei daran erinnert, daß sich jedes Element $a \in A$ in der Form $a = F(a_1, a_2, \dots, a_s)$ mit Hilfe einer geeigneten bezüglich der einstufigen Prädikatenlogik ableitbaren Funktion F ausdrücken läßt. Dies folgt aus III, Satz 3 zusammen mit Hilfssatz (2.1).

Wir sind nun in der Lage, den ersten Hauptsatz von Sebastião e Silva auch für endliche Strukturen auszusprechen:

Satz 2 (erster Hauptsatz von Sebastião e Silva für endliche Strukturen).[1] Die Automorphismen der endlichen Struktur $S = [A, \varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_r]$ entsprechen in folgender Weise umkehrbar eindeutig den Lösungen $(b_1, b_2, \dots, b_s)$ der irreduziblen Relation ψ: ein beliebiges Element $a = F(a_1, a_2, \dots, a_s)$ wird auf das Element $g(a) = F(b_1, b_2, \dots, b_s)$ abgebildet, das sich in den Elementen $b_1, b_2, \dots, b_s$ auf die analoge Weise durch eine bezüglich der einstufigen Prädikatenlogik ableitbare Funktion F ausdrücken läßt wie das Element a in den Elementen $a_1, a_2, \dots, a_s$.

Beweis. Der Beweis dieses Satzes ergibt sich ohne Schwierigkeiten aus dem entsprechenden Satz 6 des Kapitels III und aus den obigen Hilfssätzen (1.1)–(1.2) und (2.1).

3. Zusammenhang zwischen den Auffassungen von Sebastião e Silva und Krasner

In den beiden vorigen Abschnitten hatten wir die Beziehungen zwischen der Theorie der endlichen Strukturen, wie sie in Kapitel I entwickelt worden war, und der Theorie von Sebastião e Silva betrachtet. Ähnlich sollen nun hier die Zusammenhänge mit der Krasnerschen Theorie beleuchtet werden.

Sei α eine Relation der Dimension Ω im Sinne von Krasner. D.h. α entspricht einer Aussage über „Punkte" der Dimension Ω und für jeden

[1] Die Anregung zur Formulierung dieses Satzes verdankt der Autor Herrn Ludwig Reich.

solchen Punkt $P : U_\Omega \to A$ liegt entweder der Fall $\vdash\ \alpha(P)$ oder der Fall $\dashv\ \alpha(P)$ vor.

Wenn $\Omega \leq |A|$, so können wir die Referenzmenge U_Ω durch eine gleichmächtige Menge V von ableitaren Relationen einer festen Stufe p ersetzen, wie wir in Kapitel III, §8 gesehen haben. Nach Auswahl einer bijektiven Abbildung $\imath : U_\Omega \to V$ zur Identifikation der Referenzmenge mit V entspricht dann jedem Punkt $P : U_\Omega \to A$ eine im zweiten Argument funktionale Relation φ_P des Typs $t = (p, 0)$ und der Stufe $p + 1$ mit der Definition: $\vdash\ \varphi_p(\nu, a)$ dann und nur dann, wenn $a = P(u)$ und $\mu = \imath(u)$. Ferner entspricht der Relation α eine Relation α^*, deren Lösungen gerade die verschiedenen φ_P sind, für welche $\vdash\ \alpha(P)$. Für die auf diese Weise einander entsprechenden Relationen α und α^* gilt:

(3.1) Sei $g \in$ Sym(A). Dann ist $[g(\alpha)]^* = g(\alpha^*)$.

Beweis. Es gilt $g(\varphi_P) = \varphi_{g(P)}$ für jeden Punkt P der Dimension Ω. Wegen $g(v) = v$ für alle $v \in V$ ist nämlich die Relation $g(\varphi_P)$ für genau die Paare $(v, g(a)) = (g(v), g(a))$ erfüllt, für welche $\vdash\ \varphi_P(v, a)$. Das sind aber auch gerade die Lösungen von $\varphi_{g(P)}$.

Sei nun $\vdash\ [g(\alpha)]^*(\varphi)$ für eine Relation φ. Dann ist $\varphi = \varphi_Q$ für einen Punkt Q der Form $Q = g(P)$, wobei $\vdash\ \alpha(P)$. Also ist $\varphi_Q = \varphi_{g(P)} = g(\varphi_P)$ und daher $\vdash\ g(\alpha^*)(\varphi_Q)$.

Sei umgekehrt $\vdash\ g(\alpha^*)[\psi]$ angenommen. Dann folgt $\psi = g(\varphi)$ für eine Relation φ mit der Eigenschaft $\vdash\ \alpha^*(\varphi)$ und somit $\varphi = \varphi_P$ für einen Punkt P, so daß $\vdash\ \alpha(P)$. Also ist $\psi = g(\varphi) = g(\varphi_P) = \varphi_{g(P)} = \varphi_Q$ für ein Q, so daß $\vdash\ g(\alpha)(Q)$. Somit $\vdash\ [g(\alpha)]^*(\psi)$.

Aus Hilfssatz (3.1) folgt übrigens sofort, daß $g(\alpha) = \alpha$ gleichwertig ist mit $g(\alpha^*) = \alpha^*$. Denn es ist klar, daß die Abbildung $\alpha \to \alpha^*$ umkehrbar ist. Haben nun alle Relationen $\alpha \in R$ einer Krasnerschen Struktur $S = [A; R]$ eine Dimension $\Omega \leq |A|$, so kommen wir durch Ersetzung von R durch R^* zu einer Struktur $S^* = (A; R^*)$ im Sinne von Sebastião e Silva, die zu S in dem präzisen Sinn äquivalent ist, daß $\mathrm{Aut}(S) = \mathrm{Aut}(S^*)$.

In Kapitel III fehlte noch ein dem Existenzprinzip von Krasner entsprechender Satz. Zum Beweis des Existenzprinzips von Krasner hatte es genügt, die Bahn eines bijektiven Punktes P unter der vorgegebenen Gruppe G zu betrachten. Sei also β_P die der Bahn entsprechende Relation:

$\vdash\ \beta_P(Q)$ dann und nur dann, wenn $Q = g(P)$ für ein geeignetes $g \in G$.

Dann ist $G = \mathrm{Aut}\ (S)$ für die Krasnersche Struktur $S = [A; \beta_P]$ und also ist auch $G = \mathrm{Aut}(S^*)$ für die im Sinne von Sebastião e Silva definierte Struktur $S^* = (A; \beta_P^*)$.

Satz 3 (Existenzprinzip für Strukturen im Sinne von Sebastião e Silva).[2] Zu jeder Untergruppe $G \subseteq \mathrm{Sym}\,(A)$ gibt es eine Struktur S im Sinne von Sebastião e Silva derart, daß $G = \mathrm{Aut}(S)$.

4. Das reelle Kontinuum

Sei A die Menge der reellen Zahlen, ζ die ternäre Relation, die für drei reelle Zahlen a, b, c erfüllt ist, wenn $a < b$ und $b < c$ oder $c < b$ und $b < a$. Wir wollen in diesem Abschnitt die Struktur $S = (A; \zeta)$ betrachten

Seien a, b, c irgendwelche Elemente aus A. Dann tritt genau einer der folgenden sieben Fälle ein, wobei die zu Fall i gehörige Aussage mit $\eta_i(a, b, c)$ bezeichnet sei:

$$\begin{aligned}
&\vdash\ \zeta(a,b,c) && - \eta_1(a,b,c),\\
&\vdash\ \zeta(b,c,a) && - \eta_2(a,b,c),\\
&\vdash\ \zeta(c,a,b) && - \eta_3(a,b,c),\\
&a = b, b \neq c && - \eta_4(a,b,c),\\
&a \neq b, b = c && - \eta_5(a,b,c),\\
&a = c, b \neq c && - \eta_6(a,b,c),\\
&a = b, b = c && - \eta_7(a,b,c).
\end{aligned}$$

Es ist also zum Beispiel $\eta_1(a, b, c)$ die Aussage $\zeta(a, b, c)$ usw. Wir bezeichnen mit $p(a, b, c)$ diejenige von diesen sechs Aussagen, die für das Tripel (a,b,c) zutrifft.

Die Automorphismen lassen die Relation ζ invariant. Sie bilden also Intervalle auf Intervalle ab und die Urbilder von Intervallen unter einem beliebigen Automorphismus sind Intervalle. Daraus folgt, daß die Automorphismen der Struktur $S = (A; \zeta)$ nichts anderes als die stetigen umkehrbar eindeutigen Abbildungen der Menge A auf sich sind.

Der folgende Hilfssatz gibt ein Kriterium dafür an, wann sich zwei gegebene n-Tupel von Elementen aus A durch einen Automorphismus der Struktur $S = (A; \zeta)$, d.h. durch eine stetige bijektive Abbildung von A, ineinander überführen lassen. Er läßt sich leicht durch vollständige Induktion nach n beweisen.

(4.1) Sei $n \geq 3$. Genau dann läßt sich das n-Tupel $a_1, a_2, \ldots, a_n$ durch einen Automorphismus der Struktur $S = (A; \zeta)$ in das n-Tupel

[2] Die zum Beweis angegebenen Strukturen sind etwas künstlich. Nicht so einfach wäre es, Strukturen vorgegebener Art, etwa topologische Räume, projektive Ebenen usw. zu einer gegebenen Automorphismengruppe zu finden. So war zum Beispiel Sebastião e Silva sehr an der von Norbert Wiener stammenden Fragestellung interessiert, zu welchen Untergruppen G der symmetrischen Gruppe Sym (A) es einen topologischen Raum mit Automorphismengruppe G gibt.

$b_1, b_2, \ldots, b_n$ überführen, wenn für jede Kombination i, j, k verschiedener Indizes die Aussagen $p(a_i, a_j, a_k)$ und $p(b_i, b_j, b_k)$ übereinstimmen.

Aus (4.1) ergibt sich, daß jede n-stellige invariante Relation durch eine Konjunktion von Prädikaten der Form $\eta_i(X_i, X_j, X_k)$ definiert werden kann. Die invarianten Relationen sind also nicht nur elementar ableitbar sondern sie haben sogar eine besonders einfache Ableitung in der Prädikatenlogik erster Stufe. Die Struktur $S = (A; \zeta)$ kann somit als Beispiel dafür dienen, daß die drei in §1 betrachteten Ableitbarkeitsbegriffe auch für andere als endliche Strukturen zusammenfallen können.

Als eine weitere Konsequenz aus Hilfssatz (4.1) ergibt sich noch die folgende Charakterisierung der logisch ableitbaren Funktionen vom Typ $A \times A \times \ldots \times A \to A$:

(4.2) In der Struktur $S = (A; \zeta)$ sind die Funktionen $F(X_1, X_2, \ldots, X_n) = X_i$ die einzigen logisch ableitbaren Funkionen vom Typ $A \times A \times \ldots \times A \to A$.

Natürlich ist damit nichts ausgesagt über mögliche logisch ableitbare Funktionen mit Argumenten oder mit einem Funktionswert von höherer Stufe.

Wir wollen uns im folgenden noch kurz mit dem Problem der axiomatischen Charakerisierung der Struktur S befassen. Die folgenden Eigenschaften C0–C7 der Relation ζ sind leicht einzusehen. Sie sind einer Axiomatisierung der ebenen Euklidischen Geometrie entnommen (s. Zacharias [27], Seite 19–20):

C0) $(\exists X, Z)[\neg X = Z]$
C1) $(\forall X, Y, Z)[\zeta(X, Y, Z) \to \neg(X = Y \lor Y = Z \lor Z = X)]$
C2) $(\forall X, Y, Z)[\zeta(X, Y, Z) \to \zeta(Z, Y, X)]$
C3) $(\forall X, Z)[\neg X = Z \to ((\exists Y)\zeta(X, Y, Z) \land (\exists U)\zeta(X, Z, U))]$
C4) $(\forall X, Y, Z)[\neg(X = Y \lor Y = Z \lor Z = X) \to$
$(\zeta(X, Y, Z) \oplus \zeta(Y, Z, X) \oplus \zeta(Z, X, Y))]$

Dabei ist $P \oplus Q$ eine Abkürzung für die logische Operation $(P \land \neg Q) \lor (Q \land \neg P)$. In nicht formalisierter Sprache würde man also sagen "entweder liegt Y zwischen X und Z oder Z zwischen Y und X oder X zwischen Z und Y".

C5) $(\forall X, Y, Z, U)[(\zeta(X, Y, U) \land \zeta(X, Z, U)) \to$
$(Y = Z \oplus \zeta(X, Z, Y) \oplus \zeta(Y, Z, U))]$
C6) $(\forall X, Y, Z, U)[([\zeta(X, Y, U) \land \zeta(X, Z, Y)] \lor [\zeta(X, Y, U) \land$
$\zeta(Y, Z, U)]) \to \zeta(X, Z, U)]$
C7) $(\forall X, Y, Z, U)[([\zeta(X, Y, Z) \land \zeta(X, Y, U)] \to$
$(Z = U \oplus \zeta(Y, Z, U) \oplus \zeta(Y, U, Z)]$

Diese Aussagen wären auch noch wahr, wenn wir für R die Menge der rationalen Zahlen oder irgendeinen angeordneten Körper einsetzen und im übrigen die Definition von ζ unverändert lassen würden. Sie genügen also nicht zur Charakterisierung der Struktur S.
Um zu einer Charakterisierung der Struktur S zu kommen, liegt es nahe ein dem Dedekindschen Schnittaxiom entsprechendes Axiom hinzuzufügen.

Definition. Es seien X, Y, Z einfache Variable der Stufe 0 und L eine einstellige Prädikatvariable der Stufe 1. Es bezeichne Φ die Formel:

$$(\forall X, Y, Z)[(L(X) \wedge L(Z) \wedge \zeta(X, Y, Z)) \rightarrow L(Y)].$$

Sie definiert eine ableitbare Relation $\rho := \Phi|_L$ der Stufe 2. Eine einstellige Relation λ definiert ein Intervall, wenn $\vdash \rho(\lambda)$. Das Intervall ist die Lösungsmenge der einstelligen Relation λ. Ferner bezeichne Ψ die Formel:

$$\rho(L) \wedge (\exists X, Z)[L(X) \wedge L(Z) \wedge \xi(X, Y, Z)].$$

Sie definiert eine ableitbare Relation $\imath := \Psi|_{Y,L}$. Wir nennen p einen inneren Punkt des durch λ definierten Intervalls, wenn $\vdash \imath(p, \lambda)$.
Ein dem Dedekindschen Schnittaxiom entsprechendes Axiom kann in nicht formalisierter Sprache wie folgt formuliert werden:

Sei U ein Intervall, u ein Element im Innern von U and v ein Element, das nicht zu U gehört. Dann gibt es zwischen u und v ein Element b derart, daß alle Elemente zwischen b und u in U und alle Elemente zwischen b und v nicht in U liegen.
Formalisiert lautet dieses Axiom:

C8) $(\forall L, X, Z)[(\rho(L) \wedge \imath(X, L) \wedge \neg L(Z)) \rightarrow$
$(\exists B)[(\forall Y)[(\zeta(X, Y, B)(Y)) \wedge (\zeta(B, Y, Z) \rightarrow \neg L(Z))]]$.

Hätten wir für R anstelle der reellen Zahlen irgendeine stetig geordnete Menge genommen (zur Definition siehe z.B. Lenz [15]) und im übrigen die Definition von ζ aus der Anordnung unverändert übernommen, so wäre auch die Bedingung C8) noch immer erfüllt. Da es stetig geordnete Mengen gibt, die nicht zur Menge der reellen Zahlen ordnungstreu isomorph sind, so reichen also auch die Bedingungen C0)–C8) noch nicht aus zur Charakterisierung der Struktur $S = (A; \zeta)$.

Um zu einem kategorischen System von Axiomen zu kommen, kann man zum Beispiel noch die Existenz einer abzählbaren dichten Untermenge fordern. Bei den gewöhnlich in den Lehrbüchern der Analysis angegebenen Axiomensystemen für die reellen Zahlen wird die Notwendigkeit einer solchen Forderung meist dadurch umgangen, daß die

Axiome mindestens noch eine der Addition entsprechende primitive Relation enthalten. man vergleiche das schöne und besonders einfache Axiomensystem von Tarski ([23]), Seite 214). (Jedoch hat unter anderen Veblen [25] ein Axiomensystem angegeben, das sich nur auf die Anordnung als Grundbegriff stützt.)

Für die Formalisierung unseres letzten Axioms benötigen wir eine Relation ω der Stufe 2, deren Lösungen den abzählbaren Untermengen von A entsprechen. Auf den direkten Nachweis, daß diese Relation ableitbar ist, wollen wir der Kürze halber hier verzichten. Sei nun L wie oben eine einstellige Prädikatvariable der Stufe 1 und seien X, Y, S gewöhnliche Variable der Stufe 0. Unser letztes Axiom kann dann wie folgt formuliert werden:

C9) $(\exists L)[\omega(L) \wedge (\forall X, Y)(X \neq Y \rightarrow (\exists S)[L(S) \wedge \zeta(X, S, Y)])]$

Es soll nun der Gedankengang noch kurz skizziert werden, der nötig ist, um zu beweisen, daß die Axiome C0)–C9) zur Charakterisierung der reellen Zahlen ausreichen. Man zeigt zuerst, daß die Relation ζ in der abzählbaren Untermenge, deren Existenz in C9) gefordert wird, die Axiome C0)–C7) erfüllt. Als nächstes beweist man, daß jede solche abzählbare Menge auf die Menge der rationalen Zahlen bijektiv abgebildet werden kann, so daß bei dieser Abbildung die Relation ζ in die entsprechende mittels $<$ definierte Zwischenbeziehung übergeht. Schließlich beweist man mit Hilfe des Axioms C8), daß die so gewonnene Abbildung auf die gesamte Menge A eindeutig fortgesetzt werden kann.

5. Die reelle Ebene

In diesem Abschnitt wollen wir die durch die Topologie gegebene Struktur der reellen Ebene betrachten. Es sei also A die Punktmenge der reellen Ebene. Die folgende Relation υ definiert das System der Umgebungen der Punkte von A $:\vdash\ \upsilon(p, \lambda)$ für einen Punkt $p \in A$ und eine einstellige Relation λ der Stufe 1 genau dann, wenn die Lösungsmenge von λ eine Kreisscheibe mit Mittelpunkt p enthält. Die Struktur, die wir betrachten wollen, ist also $S = (A; \upsilon)$.

Die im vorigen Abschnitt untersuchte Struktur des reellen Kontinuums hatte die folgenden beiden Eigenschaften:

1) alle invarianten Relationen erster Stufe sind bereits im Sinne von Kapitel I ableitbar,
2) die Struktur ist durch eine einzige Relation der Stufe 1 definiert (nämlich durch die Zwischenbeziehung).

Beim Übergang von einer zu zwei (oder mehr) Dimensionen bleibt von diesen beiden Eigenschaften nur die erste erhalten und auch diese nur in einem trivialen Sinn. Es gibt nämlich in dieser Struktur nur triviale Relationen erster Stufe, die auch in der amorphen Struktur invariant sind. Dies liegt an folgendem bekannten Satz, von dessen Beweis wir der Vollständigkeit halber eine Skizze geben:

Satz 4. Seien $A_1, A_2, \ldots, A_n$ und $B_1, B_2, \ldots, B_n$ je n verschiedene Punkte der Ebene. Dann gibt es einen Homöomorphismus, der die Punkte $A_1, A_2, \ldots, A_n$ der Reihe nach auf $B_1, B_2, \ldots, B_n$ abbildet.

Beweis: Wir denken uns kartesische Koordinaten eingeführt und betrachten die folgenden n Punkte $P_1, P_2, \ldots, P_i, \ldots$ in einer besonders übersichtlichen Lage. P_1 liege im Ursprung des Koordinatensystems, die restlichen Punkte $P_2, \ldots, P_i$ seien sämtlich Punkte des positiven Halbstrahls der x-Achse, wobei der jeweils nächste vom vorigen den Abstand eins haben soll. In Koordinaten ausgedrückt gilt also: der Punkt P_i hat die Koordinaten $(i-1, 0)$.

Es genügt nun die folgende Aussage zu beweisen: je n beliebige untereinander verschiedene Punkte $A_1, A_2, \ldots, A_n$ lassen sich durch einen Homöomorphismus der Ebene der Reihe nach auf die Punkte $P_1, P_2, \ldots, P_n$ abbilden.

Diese Aussage beweisen wir durch Induktion nach n. Sie ist offensichtlich richtig für $n = 2$. Angenommen, sie sei für ein $n \geq 2$ bewiesen. Dann haben wir zu zeigen, daß auch $n + 1$ untereinander verschiedene Punkte $A_1, A_2, \ldots, A_{n+1}$ durch einen Homöomorphismus auf die Punkte $P_1, P_2, \ldots, P_{n+1}$ abgebildet werden können. Sei also φ ein Homöomorphismus, der A_i auf P_i abbildet $(i = 1, 2, \ldots, n)$. Sollte nun $\varphi(P_{n+1})$ auf die x-Achse des Koordinatensystems fallen, so behelfen wir uns durch folgenden Hilfssatz:

(5.1) Sei K eine Kreisscheibe innerhalb der Ebene E und seien P, Q zwei Punkte im Innern von K. Dann gibt es einen Homöomorphismus κ, der P in Q überführt und alle Punkte auf dem Rand von K und außerhalb von K festläßt.

Wir wählen nun eine Kreisscheibe K mit Mittelpunkt $\varphi(P_{n+1})$ klein genug, daß keiner der Punkte $P_1, P_2, \ldots, P_n$ in das Innere von K fällt. Ferner wählen wir irgendeinen Punkt Q im Innern von K, der nicht auf der x-Achse liegt. Sei κ der Homöomorphismus, der $\varphi(P_{n+1})$ auf Q abbildet. Dann bildet $\varphi\kappa$ die Punkte $A_1, A_2, \ldots, A_n$ auf $P_1, P_2, \ldots, P_n$ ab, und das Bild Q des Punktes P_{n+1} fällt nicht auf die x-Achse.

Nun läßt sich jeder nicht auf der x-Achse liegende Punkt der Ebene durch eine affine Abbildung der Form $\sigma : (x, y) \to (x + ya_{21}, ya_{22})$ (mit

$a_{22} \neq 0$) in jeden andern nicht auf der x-Achse liegenden Punkt überführen. Bei dieser Abbildung bleiben alle Punkte der x-Achse fest. Wir können also erreichen, daß das Bild des Punktes A_{n+1} in eine beliebig gewählte Kreisscheibe mit Mittelpunkt P_{n+1} fällt. Durch nochmalige Anwendung des Hilfssatzes a) erreichen wir sogar, daß das Bild von A_{n+1} mit P_{n+1} zusammenfällt.

Auf den Versuch einer axiomatischen Beschreibung dieser Struktur wollen wir verzichten. Dem Autor ist keine einfache axiomatische Charakterisierung bekannt.[3] Wir müssen uns also damit begnügen, daß uns diese Struktur nach einer der beiden Methoden 3) oder 4) gegeben ist, wie in Kapitel III, §6 angedeutet. Bei der unter 3) angeführten Methode würde man von einem Axiomensystem der ebenen Euklidischen Geometrie ausgehend eine Ableitung der Relation v konstruieren. Bei Methode 4) würde man von einer axiomatischen Beschreibung des Körpers der reellen Zahlen ausgehend die Menge A als die Menge aller Paare (x, y) mit reellen Zahlen x, y als Komponenten definieren und dann den zur Definition der Relation v benötigten Begriff der Kreisscheibe nach den Methoden der analytischen Geometrie einführen. Aus Satz 4 folgt noch, daß auch keine zu $S = (A; v)$ äquivalente Struktur, d.h. keine Struktur mit gleicher Automorphismengruppe, durch Relationen der Stufe 1 definiert werden kann.

6. Körpererweiterungen

In den Arbeiten von Krasner und Sebastião e Silva (s. [14] und [22]) ist die Anregung durch die Galoissche Theorie deutlich zu erkennen. Beide Autoren haben auch in jeweils eigener Weise eine Beziehung ihrer eigenen neuen Theorie zur Galoisschen Theorie der Körpererweiterungen hergestellt. Es ist daher lehrreich, die allgemeine Theorie der Strukturen von Sebastião e Silva am konkreten Beispiel der Körpererweiterungen zu betrachten.

Sei K ein Körper und E ein Erweiterungskörper von K. Wir betrachten Relationen α und μ, welche die Addition und Multiplikation im Körper E beschreiben:

$\vdash\ \alpha(e_1, e_2, e_3)$ dann und nur dann, wenn $e_3 = e_1 + e_2$ und

$\vdash\ \mu(e_1, e_2, e_3)$ dann und nur dann, wenn $e_3 = e_1 * e_2$.

Die Elemente von K betrachten wir als ausgezeichnete Konstante der zu untersuchenden Struktur. Die Menge R der zugrundeliegenden

---

[3] Jedoch geht die Charakterisierung der 2-Sphäre anhand des Jordanschen Kurvensatzes in diese Richtung (vgl. [24] theorem 4.3).

Relationen für unsere Struktur umfaßt also die Konstanten $c \in K$ sowie die beiden Relationen α und β und weiter nichts. Wir wollen also die Struktur $S = (E; \{c : c \in K\} \cup \{\alpha, \mu\})$ untersuchen.

Es ist leicht zu sehen, daß die Automorphismen der Struktur S übereinstimmen mit den Körperautomorphismen von E im herkömmlichen Sinn, welche alle Elemente von K festlassen.

Sei p ein Polynom in n miteinander vertauschbaren Variablen $X_1, X_2, \ldots, X_n$ mit Koeffizienten in K. D.h. p ist ein formaler Ausdruck der Form $\Sigma c_{\nu\mu\ldots\tau} X_1^\nu X_2^\mu \ldots X_n^\tau$. Dabei sollen nur endlich viele Koeffizienten $c_{\nu\mu\ldots\tau}$ auftreten und es wird $c_{\nu\mu\ldots\tau} \in K$ für alle Koeffizienten vorausgesetzt. Zwei Polynome werden als identisch betrachtet, wenn sie in den nicht verschwindenden Koeffizienten übereinstimmen. Die Polynome in $X_1, X_2, \ldots, X_n$ mit Koeffizienten in K bilden bekanntlich einen Ring $K[X_1, X_2, \ldots, X_n]$, wenn man sie in naheliegender Weise gemäß der Formel $\Sigma c_{\nu\mu\ldots,\tau} X_1^\nu X_1^\mu \ldots X_n^\tau + \Sigma c'_{\nu\mu\ldots,\tau} X_1^\nu X_2^\mu \ldots X_n^\tau =$
$\Sigma(c_{\nu\mu\ldots\tau} + c'_{\nu\mu\ldots\tau}) X_1^\nu X_2^\mu \ldots X_n^\tau$
addiert und unter Anwendung der Regel $c_{\nu\mu\ldots\tau} X_1^\nu X_2^\mu \ldots X_n^{\tau *}$
$c_{\kappa\lambda\ldots\sigma} X_1^\kappa X_2^\lambda \ldots X_n^\sigma = c_{\nu\mu\ldots\tau} c_{\kappa\lambda\ldots\sigma} X_1^{\nu+\kappa} X_2^{\mu+\lambda} \ldots X_n^{\tau+\sigma}$
distributiv multipliziert.
Jedem Polynom $p = \Sigma c_{\nu\mu\ldots\tau} X_1^\nu X_2^\mu \ldots X_n^\tau$ aus $K[X_1, X_2, \ldots, X_n]$ läßt sich auch eine Funktion $p : E \times E \times \ldots \times E \to E$ zuordnen, wobei $p(a_1, a_2, \ldots, a_n) = \Sigma c_{\nu\mu\ldots\tau} a_1^\nu a_2^\mu \ldots a_n^\tau$ gesetzt wird. Dabei kann es durchaus vorkommen, daß verschiedene Polynome zur selben Funktion führen.
(6.1) Die einem beliebigen Polynom $p \in K[X_1, X_2, \ldots, X_n]$ zugeordnete Funktion ist stets in der Struktur S logisch ableitbar.

Beweis: Es ist also zu zeigen, daß durch die Festsetzung
$\vdash \ \rho(a_1, a_2, \ldots, a_n, a)$ dann und nur dann, wenn $a = p(a_1, a_2, \ldots, a_n)$
eine ableitbare Relation ρ definiert wird.

Es ist aber vielleicht instruktiver, dies nicht direkt zu zeigen, sondern den Beweis durch Induktion nach dem Aufbau der Polynome unter Ausnutzung der in Kapitel III bewiesenen Eigenschaften der logischen Funktionen zu führen. Zunächst ist für Polynome, in denen keine der Variablen wirklich vorkommt, die zugehörige Funktion eine Konstante c aus K und somit nach Hilfssatz III, (5.2) logisch ableitbar. Ebenso sind nach III, (5.3) die den Polynomen der Form $p = X_i$ entsprechenden Funktionen $p(a_1, a_2, \ldots, a_n) = a_i$ logisch ableitbar.

Sei nun die Aussage für irgendwelche Polynome p und q bereits bewiesen. Bezeichnen A und M die durch die Relationen α bzw. μ gegebenen logisch ableitbaren Funktionen, so ergibt sich durch mehrmalige Funktionskomposition, daß $A\,(M(p, X_i), q)$ logisch ableitbar ist. Dies ist aber, wie man leicht sieht, die dem Polynom $pX_i + q$ zugeordnete Funktion. Es ist nun klar, daß auf diese Weise alle Polynome aufgebaut werden können, und somit folgt die Behauptung.

Wir nennen das Tupel $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ mit $a_i \in E$ eine Nullstelle des Polynoms p, wenn $p(a_1, a_2, \ldots, a_n) = 0$.

(6.2) Für jedes Polynom $p \in K[X_1, X_2, \ldots, X_n]$ ist auch die Relation σ ableitbar, welche genau für alle Nullstellen $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ von p erfüllt ist [4].

Beweis: σ läßt sich mit Hilfe der im Beweis von (6.1) eingeführten Relation ρ definieren durch die Formel $\rho(X_1, X_2, \ldots, X_n, 0)$. Da ρ durch (6.1) als ableitbar erwiesen ist, muß auch σ ableitbar sein.

Erweiterungen endlichen Grades

Der Erweiterungskörper E läßt sich als Vektorraum über dem Körper K betrachten. Die Dimension von E als Vektorraum über K heißt der Grad von E über K und wird durch $(E : K)$ bezeichnet. Wir wollen im folgenden nur den Fall betrachten, daß der Grad von E über K endlich ist. Dann sind alle Elemente $a \in E$ algebraisch über K, d.h. sie genügen einer algebraischen Gleichung $a^m + c_{m-1}a^{m-1} + \cdots + c_0 = 0$. Denn sonst wären ja die Elemente $a, a^2, a^3, \ldots$ linear unabhängig und der Grad wäre unendlich.

Ist der Grad von E endlich, so bildet zum Beispiel jede Basis von E über K ein endliches Erzeugendensystem von E im konventionellen Sinn. Es ist aber auch leicht zu sehen, daß jedes Erzeugendensystem im konventionellen Sinne auch ein Erzeugendensystem der Struktur S im Sinn von Sebastião e Silva ist. Also hat die Struktur S ein endliches Erzeugendensystem bestehend aus Elementen der Stufe 0. Wir denken uns von jetzt an ein solches Erzeugendensystem $a_1, a_2, \ldots, a_n$ fest gewählt.

Die Polynome p, für welche $p(a_1, a_2, \ldots, a_n) = 0$, bilden im Polynomring $K[X_1, X_2, \ldots, X_n]$ ein Ideal J. Sei nun ψ_J die Relation mit der Definition:

[4] Es ist nicht schwer zu beweisen, daß die Relation σ und die im Beweis von (6.1) eingeführte Relation ρ sogar elementar ableitbar sind. Es genügt diese Eigenschaft für ρ zu beweisen. Man geht induktiv nach der Anzahl der Variablen vor. Für konstante Polynome ist die Aussage trivial. Im Induktionsschritt ordnet man die zur Definition eines Polynoms in der letzten Variablen nötigen Rechenoperationen nach dem Hornerschen Schema. Man sieht auf diese Weise, wie sich die Relation ρ durch die Relationen α und μ und die Koeffizienten des Polynoms ausdrücken läßt.

$\vdash \psi_J(b_1, b_2, \ldots, b_n)$ dann und nur dann, wenn $p(b_1, b_2, \ldots, b_n) = 0$ für alle $p \in J$.

Wir werden sehen, daß ψ_J die nach III, Satz 2 eindeutig bestimmte irreduzible Relation ψ ist mit $\vdash \psi(a_1, a_2, \ldots, a_n)$. Zunächst ist ψ_J als Durchschnitt einer Menge von ableitbaren Relationen tatsächlich ableitbar und hat auch das Tupel $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ als Lösung. Es bleibt aber noch zu zeigen, daß ψ_J irreduzibel ist. Wir zeigen zunächst:

(6.3) Die Abbildung $p(X_1, X_2, \ldots, X_n) \to p(a_1, a_2, \ldots, a_n)$, welche jedem Polynom p aus $K[X_1, X_2, \ldots, X_n]$ seinen Wert an der Stelle $a_1, a_2, \ldots, a_n$ zuordnet, ist ein Ringhomomorphismus von $K[X_1, X_2, \ldots, X_n]$ auf den Körper E.

Beweis: Jede Umformung, die mit Polynomen, also formalen Ausdrücken in $X_1, \ldots, X_n$ möglich ist, läßt sich in analoger Weise als Rechnung mit den entsprechenden Ausdrücken in $a_1, \ldots, a_n$, also den Werten an der Stelle $a_1, \ldots, a_n$, vornehmen. Daher ist die Abbildung $p(X_1, X_2, \ldots, X_n) \to p(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ ein Ringhomomorphismus in den Körper E. Es bleibt aber noch zu beweisen, daß die Abbildung erschöpfend ist.

Um das einzusehen, betrachten wir ein Element $b \neq 0$ der Form $b = p(a_1, a_2, \ldots, a_n)$. Es genügt einer algebraischen Gleichung $b^m + c_{m-1}b^{m-1} + \cdots + c_0 = 0$. Ist der Grad m dieser Gleichung minimal, so folgt $c_0 \neq 0$ und $-b^{-1} = 1/c_0 b^{m-1} + c_{m-1}/c_0 b^{m-2} + \cdots + c_1/c_0$. Es ergibt sich also, daß das inverse Element zu b ebenfalls unter den Bildelementen der betrachteten Abbildung vorkommt. Daher ist der Unterring aller Elemente der Form $p(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ ein Unterkörper von E, und da dieser Unterkörper die Erzeugenden $a_1, a_2, \ldots, a_n$ enthält ist er gleich E.

(6.4) Das Ideal J ist ein maximales Ideal von $K[X_1, X_2 \ldots, X_n]$.

Beweis: Jedes J umfassende Ideal I erscheint im Quotientenring $K[X_1, X_2 \ldots, X_n]/J$ als ein Ideal I/J. Weil aber $K[X_1, X_2 \ldots, X_n]/J$ isomorph zum Körper E ist, gibt es nur die beiden Möglichkeiten $I = J$ und $I = K[X_1, X_2 \ldots, X_n]$.

(6.5) Wenn $p(b_1, b_2, \ldots, b_n) = 0$ für alle $p \in J$ und wenn $q(b_1, b_2, \ldots, b_n) = 0$, so folgt $q \in J$.

Beweis: Die Polynome q mit Nullstelle $b_1, b_2, \ldots, b_n$ bilden ein Ideal I, welches nach Voraussetzung J umfaßt. Da es Polynome gibt, welche $b_1, b_2, \ldots, b_n$ nicht als Nullstelle haben, zum Beispiel die konstanten Polynome, folgt $I = J$.

Ein n-Tupel $b_1, b_2, \ldots, b_n$, für welches wie in der Voraussetzung des vorigen Hilfssatzes $p(b_1, b_2, \ldots, b_n) = 0$ für alle $p \in J$, wollen wir eine

Nullstelle des Ideals J nennen. Im nächsten Hilfssatz werden wir den ersten Hauptsatz von Sebastião e Silva in der konkret gegebenen Situation gewissermaßen nachzeichnen.

(6.6) Die Nullstellen des Ideals J entsprechen in umkehrbar eindeutiger Weise den Automorphismen des Körpers K, welche alle Elemente von K festlassen. Und zwar ist für jede Nullstelle $b_1, b_2, \ldots, b_n$ die Abbildung $p(a_1, a_2, \ldots, a_n) \rightarrow p(b_1, b_2, \ldots, b_n)$ ein solcher Automorphismus des Körpers E und es gibt keine weiteren.

Beweis: Sei $b_1, b_2, \ldots, b_n$ eine Nullstelle des Ideals J. Für ein beliebiges Polynom p sind nach Hilfssatz e) die Aussagen $p(b_1, b_2, \ldots, b_n) = 0$ und $p(a_1, a_2, \ldots, a_n) = 0$ gleichwertig. Ist also $p(a_1, a_2, \ldots, a_n) = p_1(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ für zwei Polynome p und p_1, so folgt $p(b_1, b_2, \ldots, b_n) = p_1(b_1, b_2, \ldots, b_n)$. Die angegebene Abbildungsvorschrift ist also wohldefiniert. Es ist nun leicht einzusehen, daß bei der gegebenen Abbildungsvorschrift Summen und Produkte erhalten bleiben und daß alle Elemente c des Unterkörpers K auf sich selbst abgebildet werden. Die durch die Vorschrift gegebene Abbildung ist also ein Ringhomomorphismus. Da nicht alle Elemente von E auf 0 abgebildet werden, ist die Abbildung sogar ein Körperisomorphismus. Da der Bildkörper denselben Grad über K haben muß wie E, ist er gleich E, und wir haben den ersten Teil der Behauptung bewiesen.

Daß es keine anderen Körperautomorphismen von E geben kann, die alle Elemente von K festlassen, folgt daraus, daß jeder solche Körperautomorphismus die Nullstelle $a_1, a_2, \ldots, a_n$ des Ideals J auf eine andere Nullstelle $b_1, b_2, \ldots, b_n$ von J abbildet.

Da die Körperautomorphismen von E, welche alle Elemente von K festlassen, mit den Automorphismen der Struktur $S = (E; \{c : c \in K\} \cup \{\alpha, \mu\})$ übereinstimmen, ist nun auch klar, daß die Lösungen der oben eingeführten irreduziblen Relation ψ genau die Nullstellen des Ideals J sind. Also sind ψ und ψ_J gleich.

(6.7) Der Graph der irreduziblen Relation ψ mit $\vdash \psi(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ ist identisch mit der Menge der in E^n vorhandenen Nullstellen des Ideals J.

Es sollen nun noch die irreduziblen Relationen für Tupel $a_1, a_2, \ldots, a_m$ untersucht werden, welche E nicht erzeugen. Nach dem zweiten Hauptsatz von Sebastião e Silva ist der Graph einer solchen irreduziblen Relation φ ebenfalls eine Bahn der Automorphismengruppe. Die Elemente $a_1, a_2, \ldots, a_m$ erzeugen einen Zwischenkörper B, so daß $K \subset B \subset E$.

Für die Lösungen der Relation φ, die innerhalb B liegen, gilt eine ähnliche Beschreibung wie unter (6.7), d.h. sie sind Nullstellen eines maximalen Ideals J_1, für welches $K[X_1, X_2, \ldots, X_n]/J_1$ isomorph ist zu B. Jedoch kann die Automorphismengruppe den Zwischenkörper B noch in weitere Zwischenkörper $B_1, B_2, \ldots$ transformieren. Dabei werden Lösungen der Relation φ in Lösungen der Relation φ transformiert und Nullstellen des Ideals J_1 in Nullstellen des Ideals J_1. Also besteht der Graph von φ nun ebenfalls nur aus Nullstellen des Ideals J_1. Es ist aber damit nicht bewiesen, daß er auch alle in E^n vorkommenden Nullstellen von J_1 enthält.

Betrachten wir eine beliebige Nullstelle $b_1, b_2, \ldots, b_m$, die einen Zwischenkörper B_1 erzeuge. Wenn $q(b_1, b_2, \ldots, b_m) = 0$ für ein Polynom q, so folgt $q \in J_1$, da J_1 maximal ist. Daraus erschließt man ähnlich wie oben im Beweis von (6.6), daß die Abbildung $p(a_1, a_2, \ldots, a_m) \to p(b_1, b_2, \ldots, b_m)$ ein Isomorphismus des Zwischenkörpers B auf den Zwischenkörpers B_1 ist, unter welchem alle Elemente von K festbleiben. Es kommt nun darauf an, ob sich dieser Isomorphismus zu einem Automorphismus fortsetzen läßt, d.h. ob es ein Element der Automorphismengruppe gibt, welches diesen Isomorphismus induziert. Ist das der Fall, so ist die betrachtete Nullstelle ein Element der Bahn des Tupels $(a_1, a_2, \ldots, a_m)$ und also auch Lösung der irreduziblen Relation φ.

Insgesamt haben wir folgende Aussage bewiesen:

(6.8) Für die Erweiterung E gelte die folgende Annahme: Jeder Körperisomorphismus eines Zwischenkörpers B auf einen Zwischenkörper B_1, bei welchem alle Elemente von K festbleiben, läßt sich zu einem Automorphismus von E fortsetzen.

Dann besteht der Graph der irreduziblen Relation φ (und natürlich ebenso die Bahn des Tupels $(a_1, a_2, \ldots, a_m)$ unter der Automorphismengruppe) aus allen in E^n vorhandenen Nullstellen eines maximalen Ideals J_1.

Daß die unter (6.8) gemachte Annahme nicht immer erfüllt ist, zeigt das sehr einfache Beispiel des Erweiterungskörpers $E = \mathcal{Q}(2^{1/4})$, wobei $\mathcal{Q}$ den Körper der rationalen Zahlen bezeichnet. Im Körper E gibt es den Zwischenkörper $B = \mathcal{Q}(2^{1/2})$. Dieser Körper hat einen Automorphismus $\varphi : 2^{1/2} \to -2^{1/2}$, der sich in E nicht fortsetzen läßt. Der Grund dafür ist der, daß durch die Erweiterung von B das Element $2^{1/2}$ zu einem Quadrat geworden ist, während das Element $-2^{1/2}$ nach wie vor ein Nichtquadrat geblieben ist. Erst, wenn wir E noch durch die weitere Wurzel $i \cdot 2^{1/4}$ der irreduziblen Gleichung $X^4 - 2 = 0$ erweitern, wird auch das Element $-2^{1/2}$ ein Quadrat und in der erweiterten Erweiterung $\mathcal{Q}(2^{1/4}, i \cdot 2^{1/4})$ läßt sich φ fortsetzen.

7. Ableitbarkeit von Automorphismen

In diesem Abschnitt betrachten wir die Automorphismengruppe $\mathrm{Aut}(S)$ einer beliebigen Struktur $S = (A; R)$. Wir werden zunächst sehen, daß der Begriff „Automorphismus“ selbst sich durch eine ableitbare Relation der Stufe 2 ausdrücken läßt. Das eigentliche Ziel dieses Abschnitts ist jedoch eine Behandlung der Fragestellung 3 aus Kapitel I, §3. Die dort gestellte Frage 3 lautete: „Welche Relationen über $G = \mathrm{Aut}(S)$ lassen sich allein mit logischen Mitteln aus den gegebenen Relationen und aus der angenommenen Kenntnis der Wirkung der Gruppenelemente auf die Elemente von A ableiten ?“ Wir werden sehen, daß diese Fragestellung in der Theorie von Sebastião e Silva ihre natürliche Antwort findet. Es wird sich nämlich zeigen, daß die unter allen inneren Automorphismen invarianten Relationen über Aut(S) genau die über Aut (S) definierten aus R ableitbaren Relationen sind.[5]

Unterziehen wir nun zunächst den Begriff der bijektiven Abbildung einer genaueren Analyse. Dazu betrachten wir die folgende Formel B:

$$\begin{aligned}&(\forall X, X_1, X_2)[(T(X, X_1) \wedge T(X, X_2)) \rightarrow X_1 = X_2] \wedge\\&(\forall X, X_1, X_2)[(T(X_1, X) \wedge T(X_2, X)) \rightarrow X_1 = X_2] \wedge\\&(\forall X)(\exists X_1)(T(X, X_1)) \wedge\\&(\forall X_1)(\exists X)(T(X, X_1))\end{aligned}$$

Dabei seien X, X_1, X_2 gewöhnliche Variable der Stufe 0 und T sei eine Prädikatvariable der Stufe 1. Die Formel drückt aus, daß T eine bijektive Abbildung $A \rightarrow A$ vermittelt. Setzen wir also $\beta : B|_T$, so ist $\vdash \beta(\varphi)$ gleichbedeutend damit, daß φ eine bijektive Abbildung vermittelt. Wir bezeichnen der Deutlichkeit halber diese Abbildung mit f_φ. Dann gilt $f_\varphi(a) = b$ genau dann, wenn $\vdash \varphi(a, b)$.

Für eine Abbildung $g : A \rightarrow A$ bezeichnen wir der Deutlichkeit halber mit $g_1, g_2, \ldots$ die in den Relationenmengen $R_1(A), R_2(A), \ldots$ der Stufen 1, 2, usw. induzierten Abbildungen. Ist die Abbildung in relationaler Form durch eine Relation φ gegeben, so verwenden wir die entsprechenden Bezeichnungen $\varphi_1, \varphi_2, \ldots$ für die Relationen, welche die in $R_1(A), R_2(A)$ usw. induzierten Abbildungen darstellen. Der Begriff der induzierten Abbildung kann durch eine ableitbare Relation definiert werden:

(7.1) Für $i = 1, 2, \ldots$ sei κ_i die Relation mit der Eigenschaft
$\vdash \kappa_i(\varphi, \psi)$ dann und nur dann, wenn $\vdash \beta(\varphi)$ und $\psi = \varphi_i$. Die Relation κ_i ist in jeder Struktur ableitbar.

Beweis: Wir setzen $\varphi = \varphi_0$ und betrachten noch die zusätzliche triviale Relation κ_0 mit
$\vdash \kappa_0(\varphi, \psi)$ dann und nur dann, wenn $\vdash \beta(\varphi)$ und $\psi = \varphi_0$.

5 Für endliche Strukturen wird diese Fragestellung auch in [20] behandelt.

Wir beweisen nun durch Induktion nach i, daß die Relation κ_i ableitbar ist. Für κ_0 ist das klar. Angenommen die Behauptung sei also bereits für κ_i bewiesen. Es ist zu zeigen, daß unter dieser Voraussetzung κ_{i+1} eine ableitbare Relation ist.

Zunächst ist für einstellige Relationen γ_1, γ_2 der Stufe $i+1$ die Aussage $\vdash \varphi_{i+1}(\gamma_1, \gamma_2)$ äquivalent mit der folgenden Aussage über γ_1 und γ_2:

$$(\forall X, Y)[\gamma_2(Y) \equiv (\exists Z)[\kappa_i(\varphi, Z) \wedge Z(X, Y) \wedge \gamma_1(X)]].$$

Sei also Φ_1 die Formel:

$$(\forall X, Y)[V(Y) \equiv (\exists Z)[\kappa_i(S, Z) \wedge Z(X, Y) \wedge U(X)]]$$

Sei $\lambda_1 := \Phi_1|_{S,U,V}$. Für einstellige Relationen γ_1, γ_2 der Stufe $i+1$ folgt also $\vdash \varphi_{i+1}(\gamma_1, \gamma_2)$ dann und nur dann, wenn $\vdash \lambda_1(\varphi, \gamma_1, \gamma_2)$.

Für zweistellige Relationen der Stufe $i+1$ von einem gegebenen Typ $t = (n, m)$ mit $i+1 = \max(n, m)$ gibt es eine ähnliche Formel Φ_t:

$$\begin{aligned}&(\forall X_1, X_2, Y_1, Y_2)[V(Y_1, Y_2) \equiv \\ &\quad (\exists Z_1, Z_2)[\kappa_n(S, Z_1) \wedge \kappa_m(S, Z_2) \wedge Z_1(X_1, Y_1) \\ &\qquad \wedge Z_2(X_2, Y_2) \wedge U(X_1, X_2)]]\end{aligned}$$

Mit $\lambda_t := \Phi_t|_{S,U,V}$ gilt dann für Relationen γ_1, γ_2 vom Typ t die Äquivalenz:
$\vdash \varphi_{i+1}(\gamma_1, \gamma_2)$ dann und nur dann, wenn $\vdash \lambda_t(\varphi, \gamma_1, \gamma_2)$.

Ähnlich gibt es für jeden Typ $t = (n_1, n_2, \ldots, n_s)$ mit $\max\,(n_1, n_2, \ldots n_s) = i+1$ eine ableitbare Relation λ_t, so daß die obige Äquivalenz für alle γ_1, γ_2 vom Typ t gegeben ist.

Ferner ist die Relation τ ableitbar, deren Lösungen gerade die oben betrachteten Relationen λ_t sind. Betrachten wir nun folgende Formel Φ:

$$(\exists L)[\tau(L) \wedge L(S, U, V)]$$

Mit $\lambda := \Phi|_{S,U,V}$ folgt nun für beliebige γ_1, γ_2 der Stufe $i+1$:
$\vdash \varphi_{i+1}(\gamma_1, \gamma_2)$ dann und nur dann, wenn $\vdash \lambda(\varphi, \gamma_1, \gamma_2)$.

Wir bilden die Formel P:

$$(\forall U, V)[\lambda(S, U, V) \equiv S_{i+1}(U, V)]$$

und es ergibt sich $\kappa_{i+1} := P|_{S,S_{i+1}}$.
Damit ist (7.1) bewiesen.

Definition 1. Wir nennen eine n-stellige Relation φ mit $n \geq 2$ in der n-ten Stelle funktional, wenn es für ein beliebiges $(n-1)$-Tupel $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{n-1}$ von zulässigen Argumenten genau ein Element α_n gibt, so daß $\vdash \varphi(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$.

Wir bezeichnen in diesem Fall die durch $\alpha_n = f(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{n-1})$ definierte Funktion mit f_φ und betrachten die Elemente φ und f_φ als identisch, nur in der Notation verschieden. Wir bezeichnen die Zuordnung $\varphi \to f_\varphi$ mit id_{rel-fu}, um anzudeuten, daß es sich um die identische Abbildung und den gleichzeitigen Übergang von der relationalen in die funktionale Schreibweise handelt.

Definition 2. Ist $f : A \times A \times \cdots \times A \to A$ eine beliebige r-stellige Funktion und ist $g \in \mathrm{Sym}(A)$, so ist gfg^{-1} mit $gfg^{-1}(X_1, X_2, \ldots, X_r) = g[f(g^{-1}(X_1), g^{-1}(X_2), \ldots, g^{-1}(X_r))]$ eine ebensolche Funktion. Wir bezeichnen mit ι_g die Abbildung $f \to gfg^{-1}$.

(7.2) Sei die s-stellige Relation φ der Stufe 1 im letzten Argument funktional und sei $g \in \mathrm{Sym}(A)$. Dann gilt $gf_\varphi g^{-1} = f_{g(\varphi)}$. Mit andern Worten ist das folgende Diagramm kommutativ:

$$\begin{array}{ccc} \varphi & \xrightarrow{id_{rel\_fu}} & f_\varphi \\ \downarrow & & \downarrow \iota_g \\ g(\varphi) & \xrightarrow[id_{rel\_fu}]{} & f_{g(\varphi)} = gf_\varphi g^{-1} \end{array}$$

Beweis: Wir zeigen zuerst, daß mit φ auch $g(\varphi)$ im letzten Argument funktional ist. Seien also $b_1, b_2, \ldots, b_{s-1}$ beliebige Elemente aus A. Seien die Elemente $a_1, a_2, \ldots, a_{s-1}$ in A bestimmt durch $b_1 = g(a_1)$, $b_2 = g(a_2), \ldots, b_{s-1} = g(a_{s-1})$. Ist a_s das Element, so daß $\vdash \varphi(a_1, a_2, \ldots, a_s)$, oder $a_s = f_\varphi(a_1, a_2, \ldots, a_{s-1})$ in funktionaler Schreibweise, so ist $b_s = g(a_s)$ auch das einzige Element, so daß $\vdash g(\varphi)[b_1, b_2, \ldots, b_{s-1}, b_s]$. Also ist $g(\varphi)$ funktional im letzten Argument. In funktionaler Schreibweise ist also $b_s = f_{g(\varphi)}[b_1, b_2, \ldots, b_{s-1}]$. Weiter ergibt sich $b_s = g(a_s) = g(f_\varphi(a_1, a_2, \ldots, a_{s-1})) =$
$g(f_\varphi[g^{-1}(b_1), g^{-1}(b_2), \ldots, g^{-1}(b_{s-1})]) =$
$gfg^{-1}(b_1, \ldots, b_{s-1})$. Also gilt $f_{g(\varphi)} = gf_\varphi g^{-1}$.

Wir haben oben gezeigt, daß der Begriff "bijektive Abbildung" durch eine ableitbare Relation definiert werden kann. Es gilt sogar:

Satz 5) Der Begriff "Automorphismus der Struktur S" läßt sich durch eine ableitbare Relation definieren. Genauer gesagt ist die Relation α mit folgender Definition ableitbar:
$\vdash \alpha(\varphi)$ dann und nur dann, wenn $f_\varphi \in \mathrm{Aut}(S)$.

Ferner läßt sich auch für jede Stufe p durch eine ableitbare Relation angeben, ob eine bijektive Abbildung der Menge $R_p(A)$ durch einen Automorphismus induziert ist.

Beweis. Nach dem zweiten Hauptsatz von Sebastião *e* Silva genügt es zu zeigen, daß die Relation α unter allen Automorphismen der Struktur S invariant bleibt. Ein Automorphismus $g \in \mathrm{Aut}(S)$ bildet eine beliebige Lösung φ der Relation α ab auf $g(\varphi)$, was nach dem vorigen Lemma in funktionaler Schreibweise nichts anderes ist als $f_{g(\varphi)} = g f_\varphi g^{-1}$. Bekanntlich ist aber mit $f_\varphi \in \mathrm{Aut}(S)$ und $g \in \mathrm{Aut}(S)$ auch $g f_\varphi g^{-1} \in \mathrm{Aut}(S)$, d.h. aus $\vdash \alpha(\varphi)$ folgt $\vdash \alpha(g(\varphi))$.

Wird umgekehrt $\vdash \alpha(g(\varphi))$ vorausgesetzt, so folgt $g f_\varphi g^{-1} \in \mathrm{Aut}(S)$. Dann ist auch f_φ in $\mathrm{Aut}(S)$ und somit $\vdash \alpha(\varphi)$. Damit ist bewiesen, daß die Relation α unter allen Automorphismen der Struktur S invariant bleibt.

Der letzte Teil des Satzes ist eine einfache Konsequenz aus Hilfssatz (7.1).

Als eine weitere Folgerung aus Hilfssatz (7.2) ergibt sich nun auch die Antwort auf die Fragestellung 3) aus Kapitel I, §3:

Satz 6. Eine beliebige Relation ρ über $G = \mathrm{Aut}(S)$ ist genau dann ableitbar, wenn ρ unter allen inneren Automorphismen von G invariant ist.

Definition 3. Mit $T_n(A)$ sei die Menge aller n-stelligen Funktionen $f : A \times A \times \cdots \times A \to A$ bezeichnet.

Satz 7. Eine beliebige über $T_n(A)$ definierte Relation ρ ist genau dann ableitbar, wenn sie gegen Konjugation mit beliebigen Automorphismen $g \in \mathrm{Aut}(S)$ invariant ist.

Wir wollen zu Satz 6 noch zwei Beispiele betrachten.

Cauchys Kriterium für die Konjugiertheit von Permutationen

Wir betrachten die amorphe Struktur $S = (A; \emptyset)$ und ein Element $g \in \mathrm{Aut}(S) = \mathrm{Sym}(A)$.

Seien nun $z_1(g), z_2(g), \ldots$ nacheinander die Anzahlen der Zyklen der Länge $1, 2, \ldots$ und sei $z_\infty(g)$ die Anzahl der unendlichen Zyklen der Permutation g. Es wird dabei nicht vorausgesetzt, daß diese Anzahlen endlich seien. Es können auch unendliche Kardinalzahlen sein. Ohne Beweis sei der folgende Satz von Cauchy [6] hier angeführt.

Satz 8 (Cauchy). Zwei Permutationen h_1 und h_2 aus Sym (X) sind konjugiert, d.h. es gibt ein $g \varepsilon$ Sym (X), so daß $h_1 = g h_2 g^{-1}$ genau dann, wenn $z_1(h_1) = z_1(h_2), z_2(h_1) = z_2(h_2), \ldots$ und $z_\infty(h_1) = z_\infty(h_2)$.

Daß das in diesem Satz ausgesprochene Kriterium zur Beschreibung der Konjugiertenklassen ein Beispiel zu Satz 6 ist, bedarf noch einer

Begründung. Im endlichen Fall läßt sich das Kriterium des Stazes in jedem konkreten Fall durch ein Prädikat ausdrücken. Sei zum Beispiel angenommen, daß für die relational geschriebene Abbildung φ genau zwei Zyklen der Länge drei existieren:

$$
\begin{aligned}
&(\exists X_1, X_2, X_3, Y_1, Y_2, Y_3)[\varphi(X_1, X_2) \wedge \varphi(X_2, X_3) \wedge \varphi(X_3, X_1) \wedge \\
&\quad \varphi(Y_1, Y_2) \wedge \varphi(Y_2, Y_3) \wedge \varphi(Y_3, Y_1) \wedge \neg X_1 = X_2 \wedge \cdots \wedge \\
&\qquad \neg X_1 = Y_3 \wedge \cdots \wedge \neg Y_2 = Y_3 \wedge \\
&\quad (\forall Z_1, Z_2, Z_3)([\varphi(Z_1, Z_2) \wedge \varphi(Z_2, Z_3) \wedge \varphi(Z_3, Z_1) \wedge \\
&\qquad \neg Z_1 = Z_2 \wedge \neg Z_1 = Z_3 \wedge \neg Z_2 = Z_3] \rightarrow \\
&\qquad [Z_1 = X_1 \vee Z_1 = X_2 \vee \cdots \vee Z_1 = Y_3])].
\end{aligned}
$$

Falls für irgendeine endliche Länge unendlich viele Zyklen vorkommen oder falls unendliche Zyklen vorkommen, muß man anders vorgehen. Man muß dann letztlich die vorkommenden Kardinalzahlen z_1, z_2, usw. als ableitbare Relationen einführen. Wir wollen darauf nicht näher eingehen.

Die Konjugiertenklassen der Galoisgruppe einer endlichen normalen Körpererweiterung

Wie in §6 betrachten wir eine endliche Erweiterung E des Grundkörpers K. Wir wollen zusätzlich voraussetzen, daß E eine normale Erweiterung von K ist. Dies bedeutet, daß es außer den Elementen von K keine weiteren Elemente in E gibt, die unter allen Automorphismen festbleiben. Die Automorphismengruppe heißt in diesem Fall Galoisgruppe von E über K. Nach einem bekannten Kriterium ist E genau dann eine normale Erweiterung von K, wenn E der Zerfällungskörper eines separablen Polynoms $f \in K[X]$ ist (vgl. Artin [2]).

Die Ordnung der Galoisgruppe G ist endlich und gleich dem Grad (E:K). Da nach dem Hauptsatz der Galoisschen Theorie die Untergruppen von G in einer umkehrbar eindeutigen Beziehung zu den Zwischenkörpern B stehen, gibt es nur endlich viele Körper B zwischen K und E. Nach einem weiteren bekannten Satz (vgl. [2], Seite 44) ist daher E eine einfache Erweiterung, d.h. E wird durch ein einziges Element erzeugt. Wir können demnach ein Element a wählen, so daß $E = K(a)$.

Sei f das irreduzible Polynom über K mit Nullstelle a und um der Eindeutigkeit willen mit führendem Koeffizienten 1. Sei ρ die Relation, für welche $\vdash \rho(b)$ dann und nur dann, wenn $f(b) = 0$. Das durch die Nullstelle a bestimmte Ideal J ist in diesem Falle gleich $f \cdot K[X]$. Nach Hilfssatz §6, g) ist daher ρ die irreduzible ableitbare Relation mit $\vdash \rho(a)$

und der Graph von ρ ist die Bahn des Elementes a unter der Galoisgruppe. Die Galoisgruppe G wirkt auf der Bahn des Elementes a regulär, d.h. zu jeder Nullstelle b des Polynoms f gibt es genau ein $g \in G$, so daß $b = g(a)$.

Betrachten wir nun ein beliebiges Element $h \in G$. Die Bahn des geordneten Paares $(a, h(a))$ unter G besteht aus den Paaren der Form $(g(a), gh(a))$, wobei g die Gruppe G durchläuft. Für $b = g(a)$ ist also das Paar $(b, ghg^{-1}(b))$ ein Element der Bahn. Ist $(b, g_1hg_1^{-1}(b))$ ebenfalls ein Element der Bahn, so folgt $g_1hg_1^{-1}(g(a)) = gh(a)$ und somit $g_1hg_1^{-1}g = gh$ d.h. $g_1hg_1^{-1} = ghg^{-1}$.

Wie in in §6 können wir nun das Ideal J_{-1} von $K[X_1, X_2]$ betrachten, das durch die Nullstelle $(a, h(a))$ bestimmt ist. Die sämtlichen Nullstellen dieses Ideals bilden nun gerade die Bahn des Paars $(a, h(a))$ und somit auch den Graphen der irreduziblen ableitbaren Relation σ mit der Lösung $(a, h(a))$. Bezeichnen wir noch wie in Hilfssatz c) mit α die ableitbare Relation, welche dem Begriff des Automorphismus entspricht. Dann können wir folgende Formel Φ betrachten:

$$(\exists U, V)[\rho(U) \wedge X(U, V) \wedge \sigma(U, V) \wedge \alpha(X)]$$

Wenn $\tau := \Phi|_X$ für ein Element φ erfült ist, so gibt es Elemente $b, c \in E$, so daß die Aussage $\rho(b) \wedge \varphi(b, c) \wedge \sigma(b, c) \wedge \alpha(\varphi)$ wahr ist. Wegen der Konjunktion mit $\rho(b)$ ist b Nullstelle des Polynoms f, also $f(b) = 0$. Wegen der Konjunktion mit $\alpha(\varphi)$ ist φ ein Automorphismus (in relationaler Schreibweise). Wegen der Konjunktion mit $\sigma(b, c)$ ist $c = ghg^{-1}$ für ein passendes Element g der Galoisgruppe und somit ist $ghg^{-1} = f_\varphi$.

Ist umgekehrt φ ein zu h konjugiertes Element der Galoisgruppe, d.h. $f_\varphi = ghg^{-1}$ für ein passendes g, so setzen wir $b = g(a)$, $c = f_\varphi(b)$. Dann ist $\rho(b) \wedge \varphi(b, c) \wedge \sigma(b, c) \wedge \alpha(\varphi)$ eine wahre Aussage, also ist auch $(\exists U, V)[\rho(U) \wedge \varphi(U, V) \wedge \sigma(U, V) \wedge \alpha(\varphi)]$ wahr, d.h. $\vdash \tau(\varphi)$.
Also definiert τ die Konjugiertenklasse Elementes h.
Wir haben folgendes Resultat:

Satz 9. Jede Konjugiertenklasse C der Galoisgruppe G läßt sich durch eine ableitbare Relation $\tau := \Phi|_X$ beschreiben. Dabei hat die Formel Φ die Gestalt

$$(\exists U, V)[\rho(U) \wedge X(U, V) \wedge \sigma(U, V) \wedge \alpha(X)],$$

die Relation ρ ist bestimmt durch die Nullstellen des Polynoms f und die Relation σ durch die gemeinsamen Nullstellen der Polynome eines maximalen Ideals J in $K[X_1, X_2]$.

Nach dem Hilbertschen Bassissatz genügen übrigens endlich viele Polynome zur Definition der Relation σ. Denn es gibt Polynome $f_1, f_2, \ldots f_s \in K[X_1, X_2]$, die J erzeugen, so daß also jedes Polynom $p \in J$ die Form $f_1 q_1 + f_2 q_2 + \cdots + f_s q_s$ hat mit $q_1, q_2, \ldots, q_s \in K[X_1, X_2]$. Daraus ergibt sich noch, daß die Relation τ nicht nur ableitbar ist sondern sogar elementar ableitbar[6].

8. Eine alternative Charakterisierung der logisch ableitbaren Funktionen

In diesem Abschnitt soll gezeigt werden, daß sich die logisch ableitbaren Funktionen auch durch die in Kapitel III, §5 bewiesenen Eigenschaften (5.2)–(5.5) charakterisieren lassen. Dabei wird sich sogar herausstellen, daß von den in (5.4) aufgezählten unären Operationen die Komplementbildung nicht benötigt wird.

Definition. Sei S eine Menge von Funktionen
$F : R_{t_1} \times R_{t_2} \times \cdots \times R_{t_n} \to R_t$, so daß für jedes $n \geq 1$ und jede Kombination $t_1, t_2, \ldots, t_n, t$ folgende Bedingungen (8.1)–(8.4) erfüllt sind:
(8.1) Sei φ eine beliebige aus R ableitbare Relation oder ein aus R ableitbares Element. Dann ist die konstante Funktion $F(U_1, U_2, \ldots, U_n) = \varphi$ in der Menge S enthalten
(8.2) Jede Funktion $F(U_1, U_2, \ldots, U_n) = U_i$ ist in der Menge S enthalten.
(8.3) Sei $F : R_{t_1} \times R_{t_2} \times \ldots \times R_{t_n} \to R_t$ in der Menge S enthalten, sei S die Stellenzahl des Ergebnisses von F und seien $U_1, U_2, \ldots, U_n$ Variable des Typs $t_1, t_2, \ldots, t_n$. Dann sind die folgenden Funktionen

i) $G(U_1, U_2, \ldots, U_n) = F(U_1, U_2, \ldots, U_n)^{\uparrow}$,
ii) $G(U_1, U_2, \ldots, U_n) = F(U_1, U_2, \ldots, U_n)^{\downarrow}$,
iii) $G(U_1, U_2, \ldots, U_n) = F(U_1, U_2, \ldots, U_n)_{s-1}$,
iv) $G(U_1, U_2, \ldots, U_n) = F(U_1, U_2, \ldots, U_n)^{s+1,p}$,
v) $G(U_1, U_2, \ldots, U_n) = F(U_1, U_2, \ldots, U_n)^{\lambda}$

[6] Hierzu benötigt man allerdings in (6.2) die elementare Ableitbarkeit (vgl. Anmerkung 4).

ebenfalls in S enthalten. Dabei ist für die Bedingungen ii)–v) natürlich vorausgesetzt, daß das Funkionsergebnis von F mindestens die Stufe 1 hat, daß also $s>0$. Bei ii) ist zusätzlich vorausgesetzt, daß das Element $F(\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n)^{\downarrow}$ für alle zulässigen Substitutionen $U_1 \to \varphi_1$, $U_2 \to \varphi_2, \ldots, U_n \to \varphi_n$ existiert.
(8.4) Seien $F_1(U_1, U_2, \ldots, U_n)$ und $F_2(U_1, U_2, \ldots, U_n)$ Funktionen der Menge S vom gleichen Argumenttyp, deren Ergebnis den gleichen Typ $\neq 0$ hat. Dann gehört die Funktion

$$G(U_1, U_2, \ldots, U_n) = F_1(U_1, U_2, \ldots, U_n) \cap F_2(U_1, U_2, \ldots, U_n)$$

ebenfalls zur Menge S.

Satz 10. Jede Menge S mit den Eigenschaften (8.1)–(8.4) enthält alle logisch ableitbaren Funktionen.

Beweis: Sei F eine beliebige logisch ableitbare Funktion. Es ist zu zeigen, daß $F \in S$. Wir betrachten zuerst den Fall, daß das Ergebnis eine Stufe > 0 hat.

Der Funktion F entspricht eine ableitbare Relation χ derart, daß $\vdash \chi(\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_n, \varphi)$ gleichwertig ist mit $\varphi = F(\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_n)$. Seien nun $Y_1, \ldots, Y_n$ und $X_1, \ldots, X_n$ Prädikatvariable, die zu den Argumenten der Funktion F passen und sei Z eine zum Ergebnis von F passende Prädikatvariable. Ferner seien $U_1, \ldots, U_s$ Variable, die zum Typ t des Funktionsergebnisses passen.
Die folgenden konstanten Funktionen

$$\begin{aligned} G(Y_1, \ldots, Y_n) &= \chi \\ M(Y_1, \ldots, Y_n) &= \mu_t := Z(U_1, \ldots, U_s)|_{Z, U_1, \ldots, U_s} \end{aligned}$$

sind logisch ableitbar und gehören beide zur Menge S.

Ferner sei $F_i(Y_1, \ldots, Y_n) = Y_i$ und $I_i(Y_1, \ldots, Y_n) = F_i(Y_1, \ldots, Y_n)^{\uparrow}$. Das Ergebnis der Funktion I_i ist eine einstellige Relation und $\vdash I_i(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)[\beta]$ dann und nur dann, wenn $\alpha_i = \beta$.

Auch die Funktionen I_i sind logisch ableitbar und sie gehören ebenfalls der Menge S an.

Mit den Funktionen G, M und $I_i (i = 1, \ldots, n)$ führen wir nun Operationen entsprechend (8.3) und (8.4) durch, die uns nicht aus der Menge S hinausführen werden. Zunächst erhalten wir durch Erweiterung aus G eine Funktion G^*, deren Ergebnis die Argumente $X_1, \ldots, X_n, Z$, $U_1, \ldots, U_s$ zuläßt. Durch Erweiterung und Umstellung der Argumente erreichen wir dasselbe bei Funktionen I_i and M. Die so erhaltenen Funktionen seien mit I_i^* und M^* bezeichnet.

$$\begin{aligned}
G^*(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) &:= (\chi(X_1, \ldots, X_n, Z) \wedge U_1 = U_1 \wedge \ldots \wedge \\
&\qquad U_s = U_s)|_{X_1,\ldots,X_n,Z,U_1,\ldots,U_s}, \\
I_1^*(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) &:= (\alpha_1 = X_1 \wedge X_2 = X_2 \wedge \ldots \wedge Z = Z \wedge \\
&\qquad U_1 = U_1 \wedge \ldots \wedge U_s = U_s)|_{X_1,\ldots,X_n,Z,U_1,\ldots,U_s}, \\
\ldots \\
I_n^*(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) &:= (X_1 = X_1 \wedge \ldots \wedge \alpha_n = X_n \wedge Z = Z \wedge \\
&\qquad U_1 = U_1 \wedge \ldots \wedge U_s = U_s)|_{X_1,\ldots,X_n,Z,U_1,\ldots,U_s}, \\
M^*(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) &:= (X_1 = X_1 \wedge \ldots \wedge X_n \\
&\qquad = X_n \wedge Z(U_1, \ldots, U_s)|_{X_1,\ldots,X_n,Z,U_1,\ldots,U_s}.
\end{aligned}$$

Durch Anwendung von (8.4) erhalten wir eine neue Funktion $H^*(Y_1, \ldots, Y_n) =$

$$\begin{aligned}
&G^*(Y_1, \ldots, Y_n) \cap I_1^*(Y_1, \ldots Y_n) \cap \ldots \\
&\quad \cap I_n^*(Y_1, \ldots, Y_n) \cap M^*(Y_1, \ldots, Y_n).
\end{aligned}$$

Das Ergebnis $H^*(\alpha, \ldots, \alpha_n)$ ist eine Relation, welche der folgenden Formel entspricht:

$$\begin{aligned}
&(\chi(X_1, \ldots, X_n, Z) \wedge U_1 = U_1 \wedge \ldots U_s = U_s) \wedge \\
&(\alpha_1 = X_1 \wedge X_2 = X_2 \wedge \ldots \wedge Z = Z \wedge U_1 = U_1 \wedge \ldots \wedge U_s = U_s) \wedge \\
&\ldots \\
&(X_1 = X_1 \wedge \ldots \wedge \alpha_n = X_n \wedge Z = Z \wedge U_1 = U_1 \wedge \ldots \wedge U_s = U_s) \wedge \\
&(X_1 = X_1 \wedge \ldots \wedge X_n = X_n \wedge Z(U_1, \ldots, U_s).
\end{aligned}$$

Durch Weglassen überflüssiger Konjunktionsglieder sieht man, daß $H^*(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) :=$

$$\begin{aligned}
&\chi(X_1, \ldots, X_n, Z) \wedge \alpha_1 = X_1 \wedge \ldots \alpha_n \\
&\quad = X_n \wedge Z(U_1, \ldots, U_s)|_{X_1,\ldots X_n,Z,U_1,\ldots,U_s}.
\end{aligned}$$

Aus H^* erhalten wir nun wieder durch Umstellen der Argumente im Funktionsergebnis und durch Projektion die Funktion $H(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) :=$

$$\begin{aligned}
&(\exists Z, X_1, \ldots, X_n)[\chi(X_1, \ldots, X_n, Z) \wedge \alpha_1 = X_1 \wedge \ldots \alpha_n \\
&\quad = X_n \wedge Z(U_1, \ldots, U_s)]|_{U_1,\ldots,U_s}.
\end{aligned}$$

Es ist nun klar, daß $H(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) = F(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$. Damit ist bewiesen, daß $F \in S$.

Nun bleibt noch der Fall zu betrachten, daß das Funktionsergebnis von F die Stufe 0 hat. Dann gilt nach dem bisher bewiesenen $F^{\uparrow} \in S$ und nach (8.3.ii) folgt $F = F^{\uparrow\downarrow} \in S$.

Literatur

[1] János Aczél und J. Dhombres, Functional Equations in Several Variables. Encyclopedia of Mathematics and its Applications. Volume 31. Cambridge University Press 1989.

[2] Emil Artin, Galoissche Theorie. Mathematisch Naturwissenschaftliche Bibliothek, Band 28. Hamburg 1959.

[3] Paul Bernays und Abraham A. Fraenkel, Axiomatic Set Theory, North Holland Publishing Company, Amsterdam 1958.

[4] V. G. Bodnarčuk, L. A. Kalužnin, V. N. Kotov und B. A. Romov, Galois-Theorie für Postsche Algebren (Russisch: Teoria Galua dlja algebr Posta I, II). Kibernetika 3 (1969), 1–10 sowie Kibernetika 5 (1969), 1–9.

[5] Nicolas Bourbaki, Théorie des ensembles, Chapitre IV, Structures, Paris 1990, Masson.

[6] Augustin Cauchy, Oeuvres.

[7] I. A. Faradžev, A. A. Ivanov, M.H. Klin, A. J. Woldar (Eds.), Investigations in Algebraic Theory of Combinatorial Objects. Kluwer, Dordrecht, 1994.

[8] A. J. Franco de Oliveira, On Automorphisms of Arbitrary Mathematical Systems, History and Philosophy of Logic, 6. (Translation of [17] with some additional remarks by the translator).

[9] Jean van Heijenoort (Ed.), From Frege to Gödel, a source book in mathematical logic, 1879–1931. Harvard University Press, Cambridge, Mass. 1967.

[10] Lew A. Kalužnin, M.H. Klin, Über gewisse maximale Untergruppen der symmetrischen und alternierenden Gruppen (Russisch: O nekotorych maksimal'nych podgruppach simmetriceskich i znakoperemennych grupp.) Matem. Sbornik 87 (129) (1972), 91–121

[11] Otto H. Kegel, Adalbert Kerber, Michail H. Klin, Reinhard Pöschel (Eds.), Algebra and Combinatorics: Interactions and Applications. (A conference dedicated to the memory of Lev Arkadevich Kalužnin on the occasion of his 80th birthday. Königstein, March 6-12, 1994). Proceedings of the Conference. Erscheint demnächst.

[12] Michail H. Klin, R. Pöschel, K. Rosenbaum, Angewandte Algebra. 1988, VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften.

[13] S. Kochen, Ultraproducts in the Theory of Models, Annals of Math. 74, No. 2 (1961).

[14] Marc Krasner, Une généralisation de la notion de corps. J. Math. pure et appl. (Liouville Journal) 17 (1938), 367–385.

[15] Hanfried Lenz, Grundlagen der Elementarmathematik. VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin 1967.

[16] B. I. Plotkin, Groups of automorphisms of algebraic systems (translated by K. A. Hirsch). Wolters-Noordhoff Publishing 1972, Groningen.

[17] Reinhard Pöschel, Lew A. Kalužnin, Funktionen und Relationenalgebren. 1979, VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften (oder Birkhäuser Basel).

[18] B. A. Romov, über die Formeldarstellung von Prädikaten auf endlichen Modellen. (Russisch: O formul'nosti predikatov na konječnych modeljach.) Kibernetika 1 (1972), 41–42.
[19] Bertrand Russell, Mathematical logic as based on the theory of types. American Journal of Mathematics 30, 1908, 222-262.
[20] Adolf Schleiermacher, On a theorem of Marc Krasner about Invariant Relations, European Conference on Iteration Theory (ECIT 91), p. 230–240.
[21] José Sebastiao e Silva, Sugli automorfismi di un sistema matematico qualunque. Obras de José Sebastiao e Silva. Vol. I, pp. 105–134, Instituto Nacional de Investigacão Cientifica, Lissabon 1985.
[22] –, Para uma teoria geral dos homomorfismos. Obras de José Sebastião e Silva. Vol. I., pp. 135–335, Instituto Nacional de Investigacao Cientifica, Lissabon 1985.
[23] Alfred Tarski, Introduction to Logic and to the Methodology of Deductive Sciences. A Galaxy Book, New York, Oxford University Press 1965.
[24] R. L. Wilder, Topology of Manifolds.
[25] Oswald Veblen, Definition in Terms of Order alone in the Linear Continuum. Trans. Am. Math. Soc., 1905.
[26] Alexander I. Wittenberg, Vom Denken in Begriffen. Birkhäuser Verlag, Basel und Stuttgart, 1957.
[27] Max Zacharias, Elementargeometrie der Ebene und des Raumes. Göschen Lehrbücherei, I. Gruppe, Band 16. Berlin und Leipzig 1930.

Anschrift des Verfassers: Dr. A. Schleiermacher, Schlüsselbergstr. 16, D-81673 München, Bundesrepublik Deutschland.