Sitzungsber. Abt. II (1997) 206: 127–139

Sitzungsberichte
Mathematisch-naturwissenschaftliche Klasse Abt. II
Mathematische, Physikalische und Technische Wissenschaften

Eigenwertprobleme mit Differentialgleichungen vierter Ordnung für die kontinuierlichen klassischen Orthogonalpolynome

Von

P. A. Lesky

(Vorgelegt in der Sitzung der math.-nat. Klasse am 19. Juni 1997
durch das w. M. Leopold Vietoris)

Zusammenfassung

Ähnlich wie bei Eigenwertproblemen mit Differentialgleichungen zweiter Ordnung können solche mit Differentialgleichungen vierter Ordnung zur Gewinnung von Orthogonalpolynomen herangezogen werden. Die entstehenden Orthogonalpolynome eignen sich zur Behandlung von physikalischen und technischen Randwertproblemen mit Differentialgleichungen vierter Ordnung. H. L. Krall hat in [4] und [5] über Momentendeterminanten gezeigt, daß neben den Differentialgleichungen vierter Ordnung für die Polynome von Hermite, Laguerre, Jacobi und Bessel noch drei weitere Fälle möglich sind, die später als Legendretyp, Laguerretyp und Jacobityp bezeichnet wurden ([2], [3]). Wegen der kürzlich erfolgten Vervollständigung der (positiv definiten) kontinuierlichen klassischen Orthogonalpolynome in [8] erfolgt in dieser Arbeit die Aufstellung der Differentialgleichungen vierter Ordnung für die Polynome von Hermite, Laguerre und Jacobi (unendliche Orthogonalsysteme), Romanovski-Jacobi, Romanovski-Bessel und Romanovski-Pseudojacobi (endliche Orthogonalsysteme). Der

Pseudojacobifall ist in den Arbeiten von H. L. Krall nicht enthalten. P. Maroni gibt in [9] eine Differentialgleichung vierter Ordnung für die klassischen Orthogonalpolynome an, die sich jeweils als Spezialfall der von H. L. Krall beschriebenen Möglichkeiten erweist.

1. Polynomlösungen von linearen homogenen Differentialgleichungen vierter Ordnung

Für die Polynomlösungen $y_n(x)$ vom n-ten Grad in $x (n = 0, 1, 2, \ldots)$ der Differentialgleichung

$$P_4(x)y_n^{\mathrm{IV}}(x) + P_3(x)y_n'''(x) + P_2(x)y_n''(x) + P_1(x)y_n'(x) = \lambda_n y_n(x) \tag{1.1}$$

zeigt der Ansatz

$$y_n(x) = \sum_{k=0}^{n} a_{n,k}\, x^k \quad (a_{n,n} \neq 0, n = 0, 1, 2, \ldots), \tag{1.2}$$

daß für die Koeffizienten von (1.1) nur Polynome

$$\begin{aligned} P_4(x) &= e_{4,0} + e_{4,1}x + e_{4,2}x^2 + e_{4,3}x^3 + e_{4,4}x^4, P_3(x) = e_{3,0} + e_{3,1}x \\ &\quad + e_{3,2}x^2 + e_{3,3}x^3, P_2(x) = e_{2,0} + e_{2,1}x + e_{2,2}x^2, P_1(x) = e_{1,0} + e_{1,1}x \end{aligned}$$

in Frage kommen. Nach Einsetzen von (1.2) in (1.1) führt der Koeffizientenvergleich bei x^n auf die *Eigenwerte*

$$\begin{aligned} \lambda_n = n[&e_{1,1} + (n-1)e_{2,2} + (n-1)(n-2)e_{3,3} \\ &+ (n-1)(n-2)(n-3)e_{4,4}] \end{aligned} \tag{1.3}$$

$(n = 0, 1, 2, \ldots)$. Von besonderer Bedeutung ist die Verschiedenheit der Eigenwerte: Die Differenz $\lambda_n - \lambda_m$ ist für $n \neq m \; (n, m = 0, 1, 2, \ldots)$ von Null verschieden, wenn

$$\begin{aligned} &e_{1,1} + (n+m-1)e_{2,2} + [(n+m-1)(n-2) + m(m-1)]e_{3,3} \\ &\quad + [(n+m-1)(n-2)(n-3) + m(m-1)(n+m-5)]e_{4,4} \neq 0 \end{aligned} \tag{1.4}$$

gilt. Insbesondere muß für $\lambda_0 \neq \lambda_1$

$$e_{1,1} \neq 0 \tag{1.5}$$

sein. Der Koeffizientenvergleich bei $x^k (k = n-1, n-2, \ldots, 1, 0)$ führt auf eine füngliedrige Koeffizientenrekursion, aus der bei Verschiedenheit der Eigenwerte alle $a_{n,k}$ eindeutig in Abhängigkeit von $a_{n,n}(\neq 0)$ berechnet werden können.

2. Orthogonalität der Polynomlösungen über die selbstadjungierte Differentialgleichung

Die Differentialgleichung (1.1) wird mit einer Funktion w, die alle im folgenden erforderlichen Differenzierbarkeitseigenschaften besitzt, multipliziert:

$$wP_4\, y_n^{\mathrm{IV}} + wP_3\, y_n''' + wP_2\, y_n'' + wP_1\, y_n' = \lambda_n w\, y_n. \tag{2.1}$$

Damit liegt die *selbstadjungierte* Form ([1])

$$(wP_4\, y_n'')'' + \{[wP_2 - (wP_4)'']\, y_n'\}' = \lambda_n w\, y_n$$

vor, wenn die Differentialgleichungen

$$2(wP_4)' = wP_3 \tag{2.2}$$

und

$$(wP_2)' - (wP_4)''' = wP_1 \tag{2.3}$$

gelten, aus denen w zu bestimmen ist (Gegenstücke zur Pearsonschen Differentialgleichung).

Jetzt besteht die Möglichkeit, mit Hilfe der selbstadjungierten Differentialgleichung (2.1) die Orthogonalität der Polynomlösungen $y_n(x)$ bezüglich w als *Gewichtsfunktion* zu erreichen. Durch Multiplikation der zu n gehörenden Differentialgleichung (2.1) mit $y_m(x)$ und der zu m gehörenden Differentialgleichung (2.1) mit $y_n(x)(n, m = 0, 1, 2, \ldots)$ und deren Subtraktion entsteht

$$\begin{aligned}(\lambda_n - \lambda_m) w\, y_n\, y_m &= [(wP_4\, y_n'')'' + \{[wP_2 - (wP_4)'']\, y_n'\}']\, y_m \\ &\quad - [(wP_4\, y_m'')'' + \{[wP_2 - (wP_4)'']\, y_m'\}']\, y_n.\end{aligned} \tag{2.4}$$

Nach zweimaliger partieller Integration über (a, b) ergibt sich daraus

$$\begin{aligned}(\lambda_n - \lambda_m)\int_a^b w(x)\, y_n(x)\, y_m(x) dx &= \{[w(x)P_2(x) - (w(x)P_4(x))'']\\ &\cdot [y_n'(x)\, y_m(x) - y_n(x)\, y_m'(x)] + (w(x)P_4(x))'[y_n''(x)\, y_m(x)\\ &- y_n(x)\, y_m''(x)] + w(x)P_4(x)[y_n'''(x)\, y_m(x) - y_n''(x)\, y_m'(x)\\ &+ y_n'(x) y_m''(x) - y_n(x)\, y_m'''(x)]\}_{x=a}^{b}.\end{aligned} \tag{2.5}$$

Liegt die Verschiedenheit der Eigenwerte vor[1], dann hat man Orthogonalität der Polynomlösungen $y_n(x)$ von (2.1) auf (a, b) bezüglich $w(x)$, wenn rechts vom Gleichheitszeichen in (2.5) für alle $n = m$ $(n, m = 0, 1, 2, \ldots)$ null entsteht. Das bedingt gewisse Eigenschaften von $P_2(x)$ und $P_4(x)$ in den Randpunkten a und b. Selbstverständlich sind auch $a \to -\infty$ und $b \to \infty$ möglich, wenn $w(x)$ die erforderlichen Konvergenzeigenschaften erzeugt.

Im folgenden werden laufend die Bezeichnungen und Ergebnisse aus [7] und [8] benützt.

3. Die Polynome von Hermite

Die Gewichtsfunktion

$$w(x) = e^{\epsilon x^2} \tag{3.1}$$

läßt sich aus (2.2) gewinnen, wenn

$$P_4(x) = 1 \quad \text{und} \quad P_3(x) = 4\,\epsilon\, x$$

gewählt werden. Zur Erfüllung von (2.3) mit diesem $w(x)$ entstehen

$$P_2(x) = 2\,\epsilon(\tau + 2\epsilon x^2) \quad \text{und} \quad P_1(x) = 4\epsilon^2(\tau - 1)x,$$

wobei τ einen frei wählbaren reellen Parameter darstellt. Damit ergeben sich nach (1.3) die Eigenwerte

$$\lambda_n = 4\,\epsilon^2 n(n + \tau - 2) \quad (n = 0, 1, 2, \ldots), \tag{3.2}$$

und es entsteht die Differentialgleichung

$$y_n^{\mathrm{IV}} + 4\epsilon x\, y_n''' + 2\,\epsilon(\tau + 2\,\epsilon\, x^2)\, y_n'' + 4\,\epsilon^2(\tau - 1)x\, y_n' = \lambda_n y_n, \tag{3.3}$$

bzw. deren iterierte Form

$$L[L[y_n]] + 2\epsilon(\tau - 2)L[y_n] = \lambda_n y_n \quad \text{mit} \quad L[y_n] = y_n'' + 2\epsilon x\, y_n', \tag{3.4}$$

bzw. deren selbstadjungierte Form

$$[e^{\epsilon x^2} y_n'']'' + [2\,\epsilon(\tau - 1)e^{\epsilon x^2} y_n']' = \lambda_n e^{\epsilon x^2} y_n. \tag{3.5}$$

Die Verschiedenheit der Eigenwerte λ_n wird mit $\tau \neq 1, 0, -1, -2, \ldots$ erreicht. Ferner ist die Erfüllung der Randbedingungen aus (2.5) mit $a \to -\infty$ und $b \to \infty$ bei $\epsilon < 0$ möglich. Somit sind die Polynomlösungen $y_n(x)$ von (3.3) auf $(-\infty, \infty)$ bezüglich $w(x)$ aus (3.1) orthogo-

[1] Es ist anzunehmen, daß ähnlich wie in [6] aus der Forderung nach Orthogonalität bereits auf die Verschiedenheit der Eigenwerte geschlossen werden kann.

nal. Da derartige Orthogonalpolynome (bis auf einen konstanten Faktor) eindeutig festliegen, kann es sich bei diesen Polynomlösungen $y_n(x)$ von (3.3) nur um die Polynome von *Hermite*

$$y_n(x) = a_{n,n}x^n{}_2F_0\left(\begin{matrix}-\frac{n}{2}, \frac{1-n}{2} \\ ----\end{matrix};\frac{1}{\epsilon x^2}\right) \quad (n = 0, 1, 2, \ldots) \tag{3.6}$$

handeln. Für $a_{n,n} = 1$ erhält man die Polynome in monischer Gestalt.

4. Die Polynome von Laguerre

Die Gewichtsfunktion

$$w(x) = e^{2\epsilon x}(x-a)^\alpha \quad (a < x) \tag{4.1}$$

läßt sich aus (2.2) gewinnen, wenn

$$P_4(x) = (x-a)^2 \quad \text{und} \quad P_3(x) = 4\,\epsilon(x-a)^2 + 2(\alpha+2)(x-a)$$

gewählt werden. Zur Erfüllung von (2.3) mit diesem $w(x)$ entstehen

$$P_2(x) = 4\epsilon^2(x-a)^2 + 2\epsilon\sigma(x-a) + (\alpha+1)(\alpha+2)$$

und

$$P_1(x) = 2\epsilon(\sigma - 2\alpha - 4)[2\epsilon(x-a) + \alpha + 1],$$

wobei σ einen frei wählbaren reellen Parameter darstellt. Damit ergeben sich nach (1.3) die Eigenwerte

$$\lambda_n = 4\epsilon^2 n(n + \sigma - 2\alpha - 5) \quad (n = 0, 1, 2, \ldots), \tag{4.2}$$

und es entsteht die Differentialgleichung

$$\begin{aligned}(x-a)^2 y_n^{\mathrm{IV}} &+ [4\,\epsilon(x-a)^2 + 2(\alpha+2)(x-a)]\,y_n''' \\ &+ [4\epsilon^2(x-a)^2 + 2\epsilon\sigma(x-a) + (\alpha+1)(\alpha+2)]\,y_n'' \\ &+ 2\epsilon(\sigma-2\alpha-4)[2\epsilon(x-a)+\alpha+1]\,y_n' = \lambda_n y_n,\end{aligned} \tag{4.3}$$

bzw. deren iterierte Form

$$L[L[y_n]] + 2\epsilon(\sigma - 2\alpha - 5)L[y_n] = \lambda_n y_n \tag{4.4}$$

mit

$$L[y_n] = (x-a)\,y_n'' + [2\epsilon(x-a) + \alpha + 1]\,y_n', \tag{4.5}$$

bzw. deren selbstadjungierte Form

$$\begin{aligned}&[e^{2\epsilon x}(x-a)^{\alpha+2}\,y_n'']'' + [2\epsilon(\sigma-2\alpha-4)e^{2\epsilon x}(x-a)^{\alpha+1}\,y_n']' \\ &\quad = \lambda_n e^{2\epsilon x}(x-a)^\alpha\,y_n.\end{aligned} \tag{4.6}$$

Die Verschiedenheit der Eigenwerte λ_n wird mit $\sigma \neq 2\alpha + 4, 2\alpha + 3, 2\alpha + 2, \ldots$ erreicht. Ferner ist die Erfüllung der Randbedingungen aus (2.5) folgendermaßen möglich: Bei $x = a$ ist $\alpha > -1$ erforderlich, bei $x \to \infty$ muß $\epsilon < 0$ verlangt werden. Somit sind die Polynomlösungen $y_n(x)$ von (4.3) auf (a, ∞) bezüglich $w(x)$ aus (4.1) orthogonal. Da derartige Orthogonalpolynome (bis auf einen konstanten Faktor) eindeutig festliegen, kann es sich bei diesen Polynomlösungen $y_n(x)$ von (4.3) nur um die Polynome von *Laguerre*[2]

$$y_n(x) = \frac{a_{n,n}(\alpha+1)_n}{(2\epsilon)^n} \, {}_1F_1\left(\begin{matrix} -n \\ \alpha+1 \end{matrix}; -2\epsilon(x-a)\right) \quad (n = 0, 1, 2, \ldots) \tag{4.7}$$

handeln $((c)_0 = 1, (c)_n = c(c+1)\cdots(c+n-1), c \in \mathbb{C}, n \in \mathbb{N})$. Für $a_{n,n} = 1$ erhält man die Polynome in monischer Gestalt.

5. Die Polynome von Jacobi

Die Gewichtsfunktion

$$w(x) = (x-a)^\alpha (b-x)^\beta \quad (a < x < b) \tag{5.1}$$

läßt sich aus (2.2) gewinnen, wenn

$$P_4(x) = (x-a)^2(x-b)^2$$

und

$$P_3(x) = 2[(\beta+2)(x-a)^2(x-b) + (\alpha+2)(x-a)(x-b)^2]$$

gewählt werden. Zur Erfüllung von (2.3) mit diesem $w(x)$ entstehen

$$P_2(x) = (\beta+1)(\beta+2)(x-a)^2 + \rho_1(x-a)(x-b) + (\alpha+1)(\alpha+2)(x-b)^2$$

und

$$P_1(x) = [\rho_1 - 2(\alpha+2)(\beta+2)][(\beta+1)(x-a) + (\alpha+1)(x-b)],$$

wobei ρ_1 einen frei wählbaren reellen Parameter darstellt. Damit ergeben sich nach (1.3) die Eigenwerte

$$\lambda_n = n(n+\alpha+\beta+1)[(n-1)(n+\alpha+\beta+2) + \rho_1 - 2(\alpha+2)(\beta+2)] \tag{5.2}$$

---

[2] In [7], S. 156 ist bei Laguerre $2\varepsilon(x-a)$ durch $-2\varepsilon(x-a)$ zu ersetzen.

$(n = 0, 1, 2, \ldots)$, und es entsteht die Differentialgleichung

$$\begin{aligned}
&(x-a)^2(x-b)^2 y_n^{\mathrm{IV}} + 2[(\beta+2)(x-a)^2(x-b) \\
&\quad + (\alpha+2)(x-a)(x-b)^2]\, y_n''' + [(\beta+1)(\beta+2)(x-a)^2 \\
&\quad + \rho_1(x-a)(x-b) + (\alpha+1)(\alpha+2)(x-b)^2] y_n'' \\
&\quad + [\rho_1 - 2(\alpha+2)(\beta+2)][(\beta+1)(x-a) + (\alpha+1)(x-b)]\, y_n' \\
&\quad = \lambda_n y_n,
\end{aligned} \tag{5.3}$$

bzw. deren iterierte Form

$$L[L[y_n]] + [\rho_1 - 2(\alpha+2)(\beta+2) - \alpha - \beta - 2] L[y_n] = \lambda_n y_n \tag{5.4}$$

mit

$$L[y_n] = (x-a)(x-b)\, y_n'' + [(\alpha+\beta+2)x - a(\beta+1) - b(\alpha+1)]\, y_n', \tag{5.5}$$

bzw. deren selbstadjungierte Form

$$\begin{aligned}
&[(x-a)^{\alpha+2}(b-x)^{\beta+2} y_n'']'' \\
&\quad + \{[2(\alpha+2)(\beta+2) - \rho_1](x-a)^{\alpha+1}(b-x)^{\beta+1} y_n'\}' \\
&\quad = \lambda_n (x-a)^{\alpha}(b-x)^{\beta} y_n.
\end{aligned} \tag{5.6}$$

Die Verschiedenheit der Eigenwerte wird für $n, m = 0, 1, 2, \ldots$ mit

$$\begin{aligned}
&(n+m+\alpha+\beta+1)[\rho_1 - 2(\alpha+2)(\beta+2) \\
&\quad + n^2 + m^2 + (n+m)(\alpha+\beta+1) - \alpha - \beta - 2] \neq 0
\end{aligned} \tag{5.7}$$

erreicht. Ferner ist die Erfüllung der Randbedingungen aus (2.5) mit $\alpha > -1$ und $\beta > -1$ erreichbar. Somit sind die Polynomlösungen $y_n(x)$ von (5.3) auf (a, b) bezüglich $w(x)$ aus (5.1) orthogonal. Da derartige Orthogonalpolynome (bis auf einen konstanten Faktor) eindeutig festliegen, kann es sich bei diesen Polynomlösungen $y_n(x)$ von (5.3) nur um die Polynome von *Jacobi*

$$y_n(x) = \frac{a_{n,n}(a-b)^n(\alpha+1)_n}{(n+\alpha+\beta+1)_n}\, {}_2F_1\left(\begin{matrix} -n, n+\alpha+\beta+1 \\ \alpha+1 \end{matrix}; \frac{x-a}{b-a}\right) \tag{5.8}$$

$(n = 0, 1, 2, \ldots)$ handeln. Für $a_{n,n} = 1$ erhält man die Polynome in monischer Gestalt.

6. Die Polynome von Romanovski – Jacobi

Die Gewichtsfunktion

$$w(x) = (x-a)^{\alpha}(x-b)^{\beta} \quad (a < b < x) \tag{6.1}$$

läßt sich wie im vorigen Abschnitt gewinnen und führt zu den Eigenwerten (5.2) und zur Differentialgleichung (5.3). Lediglich die selbstadjungierte Form erhält die Gestalt

$$\begin{aligned}&[(x-a)^{\alpha+2}(x-b)^{\beta+2}y_n'']'' \\ &\quad + \{[\rho_1 - 2(\alpha+2)(\beta+2)](x-a)^{\alpha+1}(x-b)^{\beta+1}y_n'\}' \\ &\quad = \lambda_n (x-a)^{\alpha}(x-b)^{\beta}y_n \quad (n = 0,1,2,\ldots).\end{aligned} \tag{6.2}$$

Bei der Erfüllung der Randbedingungen aus (2.5) und zur Existenz der dort auftretenden Momente sind wegen der oberen Intervallgrenze, die gegen ∞ strebt, zusätzliche Überlegungen nötig. Die untere Intervallgrenze ist jetzt b, wobei die Randbedingungen an der Stelle $x = b$ mit $\beta > -1$ erfüllbar sind. Die Existenz der für (2.5) erforderlichen Momente

$$\int_b^\infty (x-a)^{\alpha}(x-b)^{\beta}x^{\mu}dx$$

kann jetzt nur bis zu einem endlichen Grad $\mu = 2N$ $(N \in \mathbb{N})$ gesichert werden. Dazu muß $\alpha + \beta + 2N < -1$ gelten, woraus wegen $\beta < -1$ die Forderung $\alpha < -2N$ entsteht. Damit sind die Randbedingungen aus (2.5) für $n, m = 0, 1, \ldots, N$ auch an der oberen Grenze erfüllt. Das auf (b, ∞) bezüglich $w(x)$ aus (6.1) orthogonale Polynomsystem enthält nur Polynome der Grade $n = 0, 1, 2, \ldots N$. Wieder entstehen als Polynomlösungen von (5.3) die Polynome von *Jacobi*.

7. Die Polynome von Romanovski – Bessel

Die Gewichtsfunktion ([8])

$$w(x) = e^{-\frac{\delta}{x-a}}(x-a)^{\alpha} \quad (a < x) \tag{7.1}$$

läßt sich aus (2.2) gewinnen, wenn

$$P_4(x) = (x-a)^4 \quad \text{und} \quad P_3(x) = 2(\alpha+4)(x-a)^3 + 2\delta(x-a)^2$$

gewählt werden. Zur Erfüllung von (2.3) mit diesem $w(x)$ entstehen

$$P_2(x) = \rho_2(x-a)^2 + 2\delta(\alpha+3)(x-a) + \delta^2$$

und

$$P_1(x) = [\rho_2 - (\alpha+3)(\alpha+4)][(\alpha+2)(x-a)+\delta],$$

wobei ρ_2 einen frei wählbaren reellen Parameter darstellt. Damit ergeben sich nach (1.3) die Eigenwerte

$$\lambda_n = n(n+\alpha+1)[(n-1)(n+\alpha+2)+\rho_2-(\alpha+3)(\alpha+4)] \tag{7.2}$$

$(n = 0, 1, 2, \ldots)$, und es entsteht die Differentialgleichung

$$\begin{aligned}(x-a)^4 y_n^{\mathrm{IV}} &+ 2[(\alpha+4)(x-a)^3+\delta(x-a)^2]\, y_n''' \\ &+ [\rho_2(x-a)^2+2\delta(\alpha+3)(x-a)+\delta^2]\, y_n'' \\ &+ [\rho_2-(\alpha+3)(\alpha+4)][(\alpha+2)(x-a)+\delta]\, y_n' = \lambda_n y_n,\end{aligned} \tag{7.3}$$

bzw. deren iterierte Form

$$L[L[y_n]] + [\rho_2 - (\alpha+4)^2 + 2]L[y_n] = \lambda_n y_n \tag{7.4}$$

mit

$$L[y_n] = (x-a)^2 y_n'' + [(\alpha+2)(x-a)+\delta]\, y_n', \tag{7.5}$$

bzw. deren selbstadjungierte Form

$$\begin{aligned}[e^{-\frac{\delta}{x-a}}(x-a)^{\alpha+4} y_n'']'' &+ \{[\rho_2-(\alpha+3)(\alpha+4)]e^{-\frac{\delta}{x-a}}(x-a)^{\alpha+2} y_n'\}' \\ &= \lambda_n e^{-\frac{\delta}{x-a}}(x-a)^{\alpha} y_n.\end{aligned} \tag{7.6}$$

Die Verschiedenheit der Eigenwerte für $n, m = 0, 1, 2, \ldots$ wird mit

$$\begin{aligned}(n+m+\alpha+1)[\rho_2 &- (\alpha+3)(\alpha+4)+n^2+m^2 \\ &+ (n+m)(\alpha+1)-\alpha-2] \neq 0\end{aligned} \tag{7.7}$$

erreicht. Bei der Erfüllung der Randbedingungen aus (2.5) und zur Existenz der dort auftretenden Momente sind wegen der oberen Intervallgrenze, die gegen ∞ strebt, zusätzliche Überlegungen nötig. Die untere Intervallgrenze ist a, wobei die Randbedingungen aus (2.5) an der Stelle $x = a$ durch $\delta > 0$ erfüllbar sind. Die Existenz der für (2.5) erforderlichen Momente

$$\int_a^\infty e^{-\frac{\delta}{x-a}}(x-a)^{\alpha} x^{\mu}\, dx$$

kann wieder nur bis zu einem endlichen Grad $\mu = 2N (N \in \mathbb{N})$ gesichert werden. Dazu muß $\alpha + 2N < -1$ gelten, woraus $\alpha < -2N - 1$ entsteht. Damit sind auch die Randbedingungen (2.5) für $n, m = 0, 1, \ldots, N$ an der oberen Grenze erfüllt. Das auf (a, ∞) bezüglich $w(x)$

aus (7.1) orthogonale Polynomsystem enthält nur Polynome der Grade $n = 0, 1, \ldots, N$. Da derartige Orthogonalpolynome (bis auf einen konstanten Faktor) eindeutig festliegen, kann es sich bei den Polynomlösungen $y_n(x)$ von (7.3) nur um die Polynome von *Romanovski–Bessel* ([8])

$$y_n(x) = \frac{a_{n,n}\delta^n}{(n+\alpha+1)_n}\, {}_2F_0\left(\begin{matrix} -n, n+\alpha+1 \\ ------ \end{matrix}; \frac{a-x}{\delta}\right) \quad (n = 0, 1, \ldots, N) \tag{7.8}$$

handeln. Für $a_{n,n} = 1$ erhält man die Polynome in monischer Gestalt.

8. Die Polynome von Romanovski – Pseudojacobi

Aus [8] entnimmt man für die Gewichtsfunktion $w(x)$

$$w'(x) = \frac{2(\epsilon-1)x + \gamma - 2f}{x^2 + 2fx + g} w(x) \quad (f^2 < g). \tag{8.1}$$

Die Gleichung (8.1) läßt sich aus (2.2) gewinnen, wenn

$$P_4(x) = (x^2 + 2fx + g)^2$$

und

$$P_3(x) = 2(x^2 + 2fx + g)[2x(\epsilon+1) + \gamma + 2f]$$

gewählt werden. Zur Erfüllung von (2.3) mit den aus (8.1) entstehenden Ableitungen für $w(x)$ ergibt sich

$$\begin{aligned} P_2(x) = {} & \rho_3 x^2 + 2[f\rho_3 + (2\epsilon+1)(\gamma - 2f\epsilon)]x \\ & + g\rho_3 - 4g\epsilon(\epsilon+1) + \gamma(\gamma+2f) \end{aligned}$$

und

$$P_1(x) = [\rho_3 - (2\epsilon+1)(2\epsilon+2)](2\epsilon x + \gamma),$$

wobei ρ_3 einen frei wählbaren reellen Parameter darstellt. Damit ergeben sich nach (1.3) die Eigenwerte

$$\lambda_n = n(n+2\epsilon-1)[(n-1)(n+2\epsilon) + \rho_3 - (2\epsilon+1)(2\epsilon+2)] \tag{8.2}$$

$(n = 0, 1, 2, \ldots)$ und es entsteht die Differentialgleichung

$$\begin{aligned} & (x^2 + 2fx + g)^2 y_n^{\mathrm{IV}} + 2(x^2 + 2fx + g)[2x(\epsilon+1) + \gamma + 2f]\, y_n''' \\ & \quad + \{\rho_3 x^2 + 2[f\rho_3 + (2\epsilon+1)(\gamma - 2f\epsilon)]x + g\rho_3 - 4g\epsilon(\epsilon+1) \\ & \quad + \gamma(\gamma+2f)\}\, y_n'' + [\rho_3 - (2\epsilon+1)(2\epsilon+2)](2\epsilon x + \gamma)\, y_n' = \lambda_n y_n, \end{aligned} \tag{8.3}$$

bzw. deren iterierte Form

$$L[L[y_n]] + [\rho_3 - 2(2\epsilon^2 + 4\epsilon + 1)]L[y_n] = \lambda_n y_n \tag{8.4}$$

mit

$$L[y_n] = (x^2 + 2fx + g)\, y_n'' + (2\epsilon x + \gamma)\, y_n', \tag{8.5}$$

bzw. deren selbstadjungierte Form

$$\begin{gathered}[w(x^2 + 2fx + g)\, y_n'']'' + \{w(x^2 + 2fx + g) \\ \cdot [\rho_3 - (2\varepsilon + 1)(2\varepsilon + 2)]\, y_n'\} = \lambda_n w\, y_n.\end{gathered} \tag{8.6}$$

Die Verschiedenheit der Eigenwerte für $n, m = 0, 1, 2, \ldots$ wird mit

$$\begin{gathered}(n + m + 2\varepsilon - 1)[\rho_3 - (2\varepsilon + 1)(2\varepsilon + 2) + n^2 + m^2 \\ + (n + m)(2\varepsilon - 1) - 2\varepsilon] \neq 0\end{gathered} \tag{8.7}$$

erreicht. Bei der Erfüllung der Randbedingungen aus (2.5) und zur Existenz der dort auftretenden Momente sind wegen der Intervallgrenzen, die gegen $-\infty$ und ∞ gehen, zusätzliche Überlegungen nötig. Die Existenz der für (2.5) erforderlichen Momente

$$\int_{-\infty}^{\infty} w(x) x^{\mu} dx$$

wird durch die Existenz von

$$\int_{-\infty}^{\infty} x^{2\varepsilon - 2 + \mu} dx$$

gesichert. Diese kann wieder nur bis zu einem endlichen Grad $\mu = 2N (N \in \mathbb{N})$ erreicht werden. Dazu muß $2\epsilon - 2 + 2N < -1$ gelten, woraus $\varepsilon < -N + \frac{1}{2}$ entsteht. Damit sind auch die Randbedingungen (2.5) für $n, m = 0, 1, \ldots, N$ an den beiden Grenzen erfüllt. Das auf $(-\infty, \infty)$ bezüglich $w(x)$ aus (8.1) orthogonale Polynomsystem enthält nur Polynome der Grade $n = 0, 1, \ldots, N$. Da derartige Orthogonalpolynome (bis auf einen konstanten Faktor) eindeutig festliegen, kann es sich bei den Polynomlösungen $y_n(x)$ von (8.3) nur um die Polynome von *Romanovski–Pseudojacobi* ([8])

$$y_n(x) = \frac{a_{n,n}(-2d)^n(\varepsilon + iv)_n}{(n + 2\varepsilon - 1)_n}\, {}_2F_1\left(\begin{matrix} -n, n + \varepsilon - 1 \\ \varepsilon + iv \end{matrix} ; \frac{x + f + d}{2d} \right) \tag{8.8}$$

$(n = 0, 1, \ldots, N; d^2 = f^2 - g, iv = \frac{2\varepsilon f - \gamma}{2d})$ handeln.[3] Für $a_{n,n} = 1$ erhält man die Polynome in monischer Gestalt; die Polynome ersten, zweiten

[3] In [7], S.155 ist bei Pseudojacobi $\varepsilon - iv$ durch $\varepsilon + iv$ zu ersetzen.

und dritten Grades sind

$$y_1(x) = x + \frac{\gamma}{2\varepsilon}, \quad y_2(x) = x^2 + \frac{2(\gamma+2f)}{2\varepsilon+2}x$$
$$+ \frac{\gamma(\gamma+2f)}{(2\varepsilon+1)(2\varepsilon+2)} + \frac{g}{2\varepsilon+1},$$
$$y_3(x) = x^3 + \frac{3(\gamma+4f)}{2\varepsilon+4}x^2 + \frac{3(\gamma+2f)(\gamma+4f)}{(2\varepsilon+3)(2\varepsilon+4)}x + \frac{3g}{2\varepsilon+3}x$$
$$+ \frac{2\gamma(3\varepsilon+5)g + \gamma(\gamma+2f)(\gamma+4f)}{(2\varepsilon+2)(2\varepsilon+3)(2\varepsilon+4)} + \frac{2fg}{(\varepsilon+1)(\varepsilon+2)}.$$

9. Die Differentialgleichung von Maroni

Aus [9] entnimmt man für die klassischen Orthogonalpolynome $y_n(x)$ folgende Differentialgleichung vierter Ordnung:

$$\begin{aligned}&\left[\tfrac{1}{2}(1+\Theta_1\Theta_2 - 2\Theta_1)n(n-1) + (\Theta_1 - 1)n + 1\right] y_{n+2}\\ &\quad = \tfrac{1}{2}[(q_2'q_1 - q_2)\,y_2 - \Theta_1 q_2' y_3 + \Theta_1\Theta_2\, y_4]q_n'' \\ &\qquad + [\Theta_1\, y_3 - q_1\, y_2]q_n' + y_2 q_n\end{aligned} \tag{9.1}$$

mit

$$q_n(x) = \frac{1}{(n+1)(n+2)}\, y_{n+2}''(x) \quad (n = 0, 1, 2, \ldots).$$

(A) $\Theta_n = 1, \quad n = 1, 2, 3, \ldots$ (Hermite, Laguerre).

(B) $\Theta_n = \frac{(n+\rho+1)(n+\mu+1)}{(n+\rho)(n+\mu)}, \quad n = 1, 2, 3, \ldots.$

(B_1) (Jacobi) $\rho = \alpha+\beta+3, \mu = \alpha+\beta+2.$

(B_2) (Bessel) $\rho = \alpha+3, \mu = \alpha+2$ (statt $\rho = 2\alpha+1$, $\mu = 2\alpha$ im Hinblick auf (7.8)).

(B_3) (Pseudojacobi) $\rho = 2\varepsilon+1, \mu = 2\varepsilon$ (zusätzlich im Hinblick auf (8.8)).

Bei Verwendung der Polynome $y_1(x) - y_4(x)$ aus (3.6), (4.7), (5.8), (7.8) und (8.8) entstehen aus (9.1) folgende Spezialfälle der Differentialgleichungen aus den vorigen Abschnitten:

Hermite :	(3.3) mit $\tau = 1$;
Laguerre :	(4.3) mit $\sigma = 2\alpha + 4$;
Jacobi :	(5.3) mit $\rho_1 = 2(\alpha+2)(\beta+2)$;
Bessel :	(7.3) mit $\rho_2 = (\alpha+3)(\alpha+4)$;
Pseudojacobi :	(8.3) mit $\rho_3 = (2\varepsilon+1)(2\varepsilon+2)$.

Diese Festlegungen der freien Parameter bedingt zwar eine besonders einfache Gestalt der jeweiligen Differentialgleichung, aber es entstehen immer zwei gleiche Eigenwerte $\lambda_0 = \lambda_1 = 0$. Darin liegt wohl der Grund, daß die Differentialgleichung (9.1) für $y_{n+2}(x)$ $(n = 0, 1, 2, \ldots)$ angegeben wird.

Literatur

[1] Collatz, L.: Eigenwertaufgaben mit technischen Anwendungen, Akad. Verlagsges., Leipzig (1963).

[2] Everitt, W. N. and Littlejohn, L. L.: Differentialoperators and the Legendre type polynomials, Diff. Int. Equations 1 (1988) 97–116.

[3] Krall, A. M.: Orthogonal polynomials satisfying fourth order differential equations, Proc. Roy. Soc. Edinburgh, Sec. A, 87 (1981) 271–288.

[4] Krall, H. L.: Certain differential equations for Tschebycheff polynomials, Duke Math. J: 4 (1938) 705–718.

[5] Krall, H. L.: On orthogonal polynomials satisfying a certain fourth order differential equation, The Pennsylv. State Coll. Bull. 34 (1940) 3–24.

[6] Lesky, P.: Die Charakterisierung der klassischen orthogonalen Polynome durch Sturm – Liouvillesche Differentialgleichungen, Arch. Rat. Mech. An. 10 (1962) 341–351.

[7] Lesky, P. A.: Vervollständigung der klassischen Orthogonalpolynome durch Ergänzungen zum Askey – Schema der hypergeometrischen orthogonalen Polynome, Sb. Öst. Ak. Wiss., math. nat. Kl. 204 (1995) 151–166.

[8] Lesky, P. A.: Endliche und unendliche Systeme von kontinuierlichen klassischen Orthogonalpolynomen, ZAMM 76 (1996) 181–184.

[9] Maroni, P.: Variations around classical orthogonal polynomials. Connected problems, Journ. Comp. Appl. Math. 48 (1993) 133–155.

[10] Romanovski, V.: Sur quelques classes nouvelles de polynômes orthogonaux, C.R. Acad. Sci. Paris 188 (1929) 1023–1025.

Anschrift des Verfassers: Univ. Prof. Dr. Peter A. Lesky, Universität Stuttgart, Math. Inst. A, Pfaffenwaldring 57, D-70569 Stuttgart.