Sitzungsber. Abt. II (1997) 206: 183–216

Sitzungsberichte
Mathematisch-naturwissenschaftliche Klasse Abt. II
Mathematische, Physikalische und Technische Wissenschaften

Gleichverteilung und Simulation

Von

E. Hlawka

(Vorgelegt in der Sitzung der math.-nat. Klasse am 19. Juni 1997
durch das w. M. Edmund Hlawka)

Zusammenfassung

In den Arbeiten von E. Hlawka und R. Mück ([1], [2]) wurde eine Methode entwickelt, um aus gleichverteilten Folgen (mod 1) gleichverteilte Folgen zu einer beliebigen Dichte ρ herzustellen. Es soll nun diese Methode dargestellt werden und zwar in einer Form, die viel allgemeiner und einfacher ist.

§1

Wir wollen nun zunächst den 1-dimensionalen Fall ins Auge fassen. Es sei $x_1, \dots, x_N$ (mod 1) eine endliche Folge ω_N im Intervall $E = [0, 1)$ mit der Diskrepanz $D_N(\omega)$. Unter D_N verstehen wir bekanntlich folgendes:

Es sei $[a, b]$ ein Teilintervall von E und es sei $A_N(\omega_N, a, b)$ die Anzahl der Glieder von ω_N, die im Intervall $[a, b]$ liegen. Dann ist

$$D_N = \sup\left|\frac{A_N(\omega_N, a, b)}{N} - V([b, a])\right|, \quad V([a, b])\text{Länge von } [a, b],$$

wo sich das Supremum über alle Intervalle $[a, b]$ erstreckt. Es sei nun $\rho(x)$ eine nicht negative integrierbare Funktion auf E mit $\int_0^1 \rho(x)dx = 1$ (ρ wird Dichte genannt), dann verstehen wir unter der Diskrepanz

$D_N(\omega_N, \rho)$ der Folge $\omega_N = (y_1, \ldots, y_N)$

$$D_N(\omega_N, \rho) = \sup \left| \frac{A_N(\omega_N, a, b)}{N} - \int\limits_{[a,b]} \rho(x) dx \right|.$$

Im s-dimensionalen Fall liegen die Punkte der Folge ω_N im s-dimensionalen halboffenen Einheitswürfel und das Intervall $[a, b]$ ist ein s-dimensionales Teilintervall von E^s, $V([a, b])$ ist sein Volumen und ρ ist eine Dichte in E^s. Wir beschränken uns hier auf den Fall, daß $\rho(x) = \rho_1(x_1) \cdot \ldots \cdot \rho_s(x_s)$, wo ρ_j eindimensionale Dichten sind.

Die Konstruktion von solchen Folgen mit der Dichte ρ verläuft nun folgendermaßen:
Ist $x = (x^{(1)}, \ldots, x^{(s)})$ ein Punkt in E^s, dann sei

$$\begin{aligned} F_1(x^{(1)}) &= \int\limits_0^{x^{(1)}} \int\limits_0^1 \cdots \int\limits_0^1 \rho(u_1, \ldots, u_s) du_1 \cdots du_s \\ F_2(x^{(2)}) &= \int\limits_0^1 \int\limits_0^{x^{(2)}} \cdots \int\limits_0^1 \rho(u_1, \ldots, u_s) du_1 \cdots du_s \\ &\vdots \\ F_s(x^{(s)}) &= \int\limits_0^1 \int\limits_0^1 \cdots \int\limits_0^{x^{(s)}} \rho(u_1, \ldots, u_s) du_1 \cdots du_s. \end{aligned} \tag{1}$$

Setzen wir nun voraus, daß die ρ_j nur auf einer Nullmenge verschwinden und überall stetig sind, dann sind diese s Funktionen $F_j(x^{(j)})$ in den zugehörigen Variablen $x^{(j)}$ streng monoton wachsend, daher existieren zu diesen Funktionen $F_j(x^{(j)})$ die inversen Funktionen $F_j^{-1}(x^{(j)})$. Nun definieren wir den Punkt $y_k = (y_k^{(1)}, \ldots, y_k^{(s)})$, wobei

$$y_k^{(j)} = \frac{1}{N} \sum_{r=1}^{N} [1 + x_k^{(j)} - F_j(x_r^{(j)})], \quad j = 1, \ldots, s, \quad k = 1, \ldots, N,$$

$[x] =$ größte ganze Zahl $\leq x$, wo $x_k = (x_k^{(1)}, \ldots, x_k^{(s)})$ und $\omega_N = (x_1, \ldots, x_N)$ eine Folge zur Diskrepanz D_N ist.

Wir werden nun zeigen, daß die konstruierte Folge $\tilde{\omega} = (y_1, \ldots, y_N)$ eine Diskrepanz $D_N(\tilde{\omega}, \rho)$ hat, welche bis auf einen Faktor durch die Diskrepanz $D_N(\omega)$ abgeschätzt werden kann. Zum Beweis beachten wir, daß

$$y_k^{(j)} = \frac{z_k^{(j)}}{N},$$

ist, wo $z_k^{(j)}$ die Anzahl der $x_r^{(j)}$ ist, für die $x_r^{(j)} < F_j^{-1}(x_k^{(j)})$ gilt. Es ist nach Definition der Diskrepanz

$$\frac{z_k^{(j)}}{N} = F_j^{-1}(x_k^{(j)}) + \delta_k^{(j)} D_N$$

wobei die δ_k^j zwischen -1 und 1 liegen. Dies wird klar, wenn wir jenes Teilintervall $0 \leq x^{(l)} < \alpha^{(l)}$ betrachten, $l = 1, \ldots, s$, wo alle $\alpha^{(l)} = 1$ sind, ausgenommen $\alpha^{(l)}$, welches gleich $F_j^{-1}(x_{(k)}^{(j)})$ ist.

Betrachten wir jetzt ein beliebiges s-dimensionales Teilintervall $[a, b]$, $a = (a_1, \ldots, a_s), b = (b_1, \ldots, b_s)$, und bestimmen wir die Anzahl A der $y_1, \ldots, y_N$, die in diesem Teilintervall liegen, für die also gilt:

$$0 \leq a_j \leq y_k^j \leq b_j < 1, \quad j = 1, \ldots, s.$$

Bezeichnen wir mit A^* die Anzahl der x_k, für die gilt

$$a_j + D_N \leq F_j^{-1}(x_k^{(j)}) \leq b_j - D_N, \quad j = 1, \ldots, s,$$

mit A^{**} die Anzahl der $x_k^{(j)}$, für die gilt

$$a_j - D_N \leq F_j^{-1}(x_k^{(j)}) \leq b_j + D_N, \quad j = 1, \ldots, s,$$

so ist

$$A^* \leq A \leq A^{**}.$$

Es ist nun nach Definition der Diskrepanz A^* gleich der Anzahl der x_k, für die

$$F_j(a_j + D_N) \leq x_k^{(j)} \leq F_j(b_j - D_N), \quad j = 1, \ldots, s,$$

ist und A^{**} die Anzahl der y_k, für die

$$F_j(a_j - D_N) \leq x_k^{(j)} \leq F_j(b_j + D_N), \quad j = 1, \ldots, s,$$

ist. So erhalten wir sofort, daß

$$\frac{A^{**}}{N} \leq \prod_{j=1}^{s} (F_j(b_j + D_N) - F_j(a_j - D_N)) + D_N$$

und

$$\frac{A^*}{N} \geq \prod_{j=1}^{s} (F_j(b_j - D_N) - F_j(a_j + D_N)) - D_N.$$

Anhand der Definition der F_j können wir, wenn wir $M(\rho) = \sup \rho$ setzen, die Abschätzung

$$\begin{aligned}
&\frac{A^{**}}{N} - \int\limits_{[a,b]} \rho(x) dx_1 \cdots dx_s \\
&\quad \leq D_N + \int\limits_{a_1 - D_N}^{b_1 + D_N} \cdots \int\limits_{a_s - D_N}^{b_s + D_N} - \int\limits_{a_1}^{b_1} \cdots \int\limits_{a_s}^{b_s} \rho(x) dx_1 \cdots dx_s \\
&\quad \leq D_N + ((1 + 2D_N)^s - 1) M(\rho) \leq (1 + 3s\, M(\rho)) D_N
\end{aligned}$$

vornehmen, wenn wir annehmen, daß D_N hinreichend klein ist. Genauso gilt

$$\int\limits_{[a,b]} \rho(x) dx_1 \cdots dx_s - \frac{A^*}{N} \leq (1 + 3s\, M(\rho)) D_N,$$

was zur Zusammenfassung

$$\frac{A^{**} - A^*}{N} \leq (2 + 6s\, M(\rho)) D_N$$

und daher auch

$$D_N(\tilde{\omega}, \rho) = \sup_{a,\, b} \left| \frac{A_N(\tilde{\omega}_N, a, b)}{N} - \int\limits_{[a,b]} \rho(x) dx_1 \cdots dx_s \right| \leq C\, D_N(\omega)$$

mit $C = 2 + 6s\, M(\rho)$ führt.

Es sei nun f eine stetige Funktion in E^s. Es sei weiter

$$\lambda_N(f) = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^{N} f(y_k)$$

und

$$\lambda(f, \rho) = \int\limits_{E^s} f(x) \rho(x)\, dx,$$

so ist nach der Arbeit [3]

$$|\lambda_N(f) - \lambda(f, \rho)| \leq \sigma(f, \delta),$$

wo $\sigma(f, \delta)$ der Stetigkeitsmodul von f mit $\delta = (D_N(\tilde{\omega}_N, \rho))^{1/(s+1)}$ ist. Ist f nur integrierbar, dann sei $\sigma(f, \delta)$ die Schwankung.

Wir wollen gleich eine Verallgemeinerung treffen, indem wir statt dem Einheitswürfel E^s den Quader $[a, b] : a_1 \leq x_1 < b_1, \ldots, a_s \leq x_s < b_s$ nehmen. Weiters sei auf diesem Quader eine Dichte ρ definiert, dann definieren wir auf E^s die Dichte $\bar{\rho}(t) = V([a, b]) \cdot \rho(a + (b - a)t)$, dabei haben wir die vektorielle Schreibweise benützt

$$a = (a_1, \dots, a_s) \quad \text{und} \quad b - a = (b_1 - a_1, \dots, b_s - a_s),$$

$(b-a)t$ ist der Vektor $((b_1 - a_1)t_1, \dots, (b_s - a_s)t_s)$, $\quad V =$ Volumen.

Nehmen wir an, daß sich dieser Quader ins Unendliche erstreckt. Nehmen wir weiters der Einfachheit halber an, daß $s = 1$ ist, also daß wir ein Intervall $[a, \infty]$ haben und daß für die Dichte ρ gilt

$$\int_a^\infty \rho dx = 1,$$

dann folgt aus der Konvergenz dieses Integrals, daß es für jedes $\epsilon > 0$ ein b geben muß, sodaß

$$\int_a^b \rho dx = 1 - \epsilon.$$

Dann nehmen wir die Dichte

$$\hat{\rho} = \frac{\bar{\rho}(x)}{1 - \epsilon}.$$

Es ist dann

$$\int_a^b \hat{\bar{\rho}}\, dx = 1.$$

Kehren wir zum Fall zurück, daß $[a, b]$ beschränkt ist. Wir setzen jetzt $\hat{y}_k = a + (b - a)y_k$, wo die y_k mit Hilfe von $\bar{\rho}$ auf E^s konstruiert sind und setzen

$$\hat{\lambda}_N(f) = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^{N} f(\hat{y}_k), \tag{2}$$

wo f integrierbar auf dem Quader $[a, b]$ ist und

$$\hat{\lambda}_N(f, \rho) = \int_{[a,b]} f(x)\rho(x)\, dx + \text{Fehler}, \tag{3}$$

wo

$$\text{Fehler} \leq \sigma(f, \delta) \quad \text{mit} \quad \delta = (C D_N(\omega_N))^{\frac{1}{s}} \tag{3'}$$

(σ ist die mittlere Schwankung von f im Quader). Dies gilt allerdings nur, wenn das Integral ein endliches ist.

Ist dies nicht der Fall, so gehen wir so vor: Wenn wir uns wieder auf den Fall $s = 1$, $[a, \infty]$ beschränken, so kommt durch das Abschneiden noch ein Fehler von der Größenordnung ϵ hinzu. Wir werden dann zweckmäßig $\epsilon = \sigma(f, \delta)$ wählen.

Es liegt auf der Hand, welche Modifikationen anzuwenden sind, wenn z.B. $a = -\infty$ oder $a = -\infty, b = \infty$ ist. Im mehrdimensionalen Fall sind die analogen Modifikationen anzubringen.

Wir haben in diesem Paragraphen vorausgesetzt, daß sich ρ als ein Produkt von 1-dimensionalen Dichten darstellen läßt. Wenn dies nicht der Fall ist, so sind die Überlegungen komplizierter, dies soll aber in einer anderen Arbeit behandelt werden.

Bemerkung: Liegt eine Unendlichkeitsstelle von ρ vor, so ist auch hier eine entsprechende Modifikation durch „Abschneiden" möglich, da die Menge, wo ρ groß ist, kleines Maß haben muß.

§2

Wir wollen jetzt diese Formel dazu benützen, um einige Anwendungen zu geben, wollen uns aber, wenn nichts anderes gesagt wird, auf den Fall $s = 1$ und, daß $[a, b] = E^1$ ist, beschränken.

Wir wollen nun annehmen, daß die Dichte ρ noch von der Zeit abhängt. Dann hängen die y_k (Wir benützen die Bezeichnungen von §1) von der Zeit t ab und wir nennen sie kurz auch Teilchen zur Zeit t.

Es sei nun K ein Teilintervall von E^1. Liegt der s-dimensionale Fall vor, dann sei K ein s-dimensionaler Quader. Es sei nun χ_K die charakteristische Funktion oder Indikatorfunktion von K und wir nehmen nun $f(x) = \chi_K(x)$. Dann ist

$$U_K(t) = \sum_{k=1}^{N} \chi_K(y_k(t))$$

die Anzahl der Teilchen, die zur Zeit t in diesem Quader K liegen, und wir haben also nach §1 (3) die Formel

$$\frac{U_K(t)}{N} = \int_K \rho(x, t)\, dx + \text{Fehler},$$

wo der Fehler $\leq \sigma(f, \delta)$ (siehe (3′)). Nehmen wir nun an, ρ genügt einem Erhaltungssatz von der Form

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial j}{\partial x} = 0,$$

bzw. im s-dimensionalen Fall

$$-\frac{\partial\rho}{\partial t} = \frac{\partial j_1}{\partial x_1} + \cdots + \frac{\partial j_s}{\partial x_s} = \operatorname{div} j.$$

Dann erhalten wir

$$\begin{aligned}\frac{U_K(t+l,x) - U_K(t,x)}{N} &= \int\limits_K (\rho(t+l) - \rho(t))dx + \text{Fehler}\\ &= \int\limits_K dx \int\limits_t^{t+l} \frac{\partial\rho}{\partial t} t + \text{Fehler} \qquad (1)\\ &= -\int\limits_t^{t+l} dt \int\limits_K \operatorname{div} j\, dx + \text{Fehler}\end{aligned}$$

nach dem Gaußschen Integralsatz ist dies

$$\int\limits_t^{t+l} dt \int\limits_{\partial K} j\,\vec{n}\, do + \text{Fehler}, \qquad (1')$$

wo ∂K die Oberfläche des Quaders ist.

Man sieht sofort, daß wir statt des Quaders auch eine beliebige glatte Mannigfaltigkeit nehmen können, nur ist dann der Fehler größer, wir wollen uns aber damit nicht aufhalten.

Wir können diese Umformung noch verallgemeinern, wenn wir statt der charakteristischen Funktion eine Funktion von der Gestalt $g = f\chi_K$ nehmen, wo f differenzierbar sein soll. Dann wird $\lambda_N(g)$ ebenfalls eine Funktion in t, nennen wir sie $G(t)$, dann erhalten wir

$$\begin{aligned}\frac{G(t+l) - G(t)}{N} &= \int\limits_K f(x)(\rho(x,t+l) - \rho(x))dx + \text{Fehler}\\ &= -\int\limits_t^{t+l} dt \int\limits_K f \operatorname{div} j\, dx + \text{Fehler}.\end{aligned}$$

Nun ist

$$\int\limits_K f \operatorname{div} j\, dx = -\int\limits_{\partial K} f j\,\vec{n}\, do + \int\limits_K j \operatorname{grad} f\, dx$$

und wir erhalten also

$$\frac{G(t+l) - G(t)}{N} = \int\limits_t^{t+l} dt \int\limits_{\partial K} f j\,\vec{n}\, do - \int\limits_t^{t+l} dt \int\limits_K j \operatorname{grad} f\, dx + \text{Fehler}. \qquad (2)$$

Ist $\rho = \rho_1 \cdots \rho_s$, wie wir ja in §1 angenommen haben, so können wir für die r-te Komponente von j nehmen

$$j_r = \frac{\rho(x)}{\rho(x_r)} \int_0^{x_r} \frac{\partial \rho_j}{\partial t} dz_r.$$

Wir rechnen sofort nach, daß die Kontinuitätsgleichung $-\frac{\partial \rho}{\partial t} = \operatorname{div} j$ erfüllt ist. Wir nehmen jetzt $f(x) = x$, dann erhalten wir

$$\left| \frac{1}{N} \sum_{k=1}^{N} y_k(t) - \int_E x\rho(x,t)dx \right| \leq \text{Fehler.} \tag{3}$$

Man könnte auch $x - 1/2$ nehmen, dann wäre y_l durch $y_k - 1/2$ zu ersetzen. Wir erhalten für die mittlere Geschwindigkeit

$$\frac{1}{N} \sum_{k=1}^{N} \frac{y_k(t+l) - y_k(t)}{l}. \tag{4}$$

nach (2), wenn wir vom Oberflächenintegral absehen

$$\frac{1}{l} \left(\int_t^{t+l} dt \int_K j dx + \text{Fehler} \right).$$

Setzen wir $v(x,t) = j(x,t)/\rho(x,t)$, so schreibt sich dies als

$$\frac{1}{l} \left(\int_t^{t+l} dt \int_K \rho(x,t)v(x,t)dx + \text{Fehler} \right).$$

Es ist also im wesentlichen v die mittlere Geschwindigkeit der Strömung j.

§3. Beispiele

Als erstes Beispiel betrachten wir ein elektrisches Feld. Wir wollen aber nur den 1-dimensionalen Fall behandeln, nur eine Raumkoordinate zugrunde legen. Wir nehmen das Potential A mit den Komponenten $(\cos \pi(x-t) + \cos \pi(x+t), 0, 0,)$, dann betrachten wir nur die y-Komponente der elektrischen Feldstärke $E_y = \pi(\sin \pi(x-t) - \sin \pi(x+t))$ und

$$H_z = \frac{\partial A}{\partial x} = \pi(\sin \pi(x-t) + \sin \pi(x+t)),$$

dabei haben wir die Lichtgeschwindigkeit $c = 1$ gesetzt. Dann nehmen wir als Dichte $\rho = \sin^2 \pi(x-t) + \sin^2 \pi(x+t)$, setzen

$j = \sin^2 \pi(x-t) - \sin^2 \pi(x+t)$, also ist

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial j}{\partial x} = 0.$$

j ist die Stromdichte. Die y_k können jetzt ohne weiteres hingeschrieben werden:

$$y_k(t) = \frac{1}{N} \sum_{l=1}^{N} [1 + x_k - \int_0^{x_l} (\sin^2 \pi(u-t) + \sin^2 \pi(u+t)) du], \qquad (1)$$

also explizit

$$y_k(t) = \frac{1}{N} \sum_{l=1}^{N} [1 + x_k + x_l - \frac{1}{4\pi} (\sin 2\pi(x_l - t) + \sin 2\pi(x_l - t))]. \qquad (2)$$

Wir können die y_k als ein Modell für Quantionen auffassen, die sich mit der Zeit t bewegen.

Als zweites Beispiel nehmen wir die Schrödingergleichung im 1-dimensionalen Fall

$$ih \frac{\partial \psi}{\partial t} = -\frac{h^2}{2m} \Delta \psi + V(x),$$

$$\rho = |\psi|^2.$$

Wir betrachten die zugehörige Kontinuitätsgleichung

$$j = \frac{ih}{2m} (\psi \text{ grad } \psi^* - \psi^2 \text{ grad } \psi). \qquad (3)$$

ψ^* soll, wie durchwegs, das komplexe Konjugium von ψ bezeichnen. Bekanntlich ist j die sogenannte Wahrscheinlichkeitsstromdichte. Es ist

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{ div} j = 0.$$

Wir können unsere bereits entwickelten Formeln §2 (1) verwenden. Dann haben wir also auf der linken Seite die Differenz der Anzahl der Teilchen, die sich im Kasten K im Zeitraum $[t, t+l]$ befinden und auf der rechten Seite die sogenannte Stromdichte.

Wir nehmen nun folgendes Beispiel:

$$\varphi(x,t) = \left[C(x) \cos \frac{At}{h} + iD(x) \sin \frac{At}{h} \right], \qquad (4)$$

dabei sind A und h Konstante, h ist die Plancksche Wirkungskonstante.

$$\rho(x,t) = |\psi(x,t)|^2 = C^2(x)\cos^2\frac{At}{h} + D^2\sin^2\frac{At}{h}. \tag{5}$$

Dabei sei vorausgesetzt, daß

$$\int_0^1 C^2 dx = \int_0^1 D^2 dx = 1,$$

wobei der Strom

$$j = \frac{A}{h}\sin\frac{2At}{h}\int_0^x (C^2(\xi) - D^2(\xi))d\xi \tag{6}$$

ist. Es ist wieder

$$\frac{\partial\rho}{\partial t} + \frac{\partial j}{\partial x} = 0.$$

Es ist nun nach §2 (1), wenn das Intervall $K\,:\,a < x < b$ ist,

$$\begin{aligned}\frac{U_K(t+l) - U_K(t)}{N} &= \frac{A}{h}\int_t^{t+h}\sin\frac{2A}{h}\,dt\int_a^b (C^2(\xi) - D^2(\xi)d\xi) + \text{Fehler}\\ &= -\frac{1}{2}\left[\cos\frac{2A(t+l)}{h} - \cos\frac{2At}{h}\right]\int_a^b (C^2(\xi) - D^2(\xi))d\xi + \text{Fehler}.\end{aligned} \tag{7}$$

Die Folge selbst wird gegeben, wenn wir jetzt als gleichverteilte Folge $x_r = r/N$ wählen, durch

$$\begin{aligned}\tilde{y}_k(t) = \frac{1}{N}\sum_{r=1}^{N}\Bigg[1 + \frac{k}{N} - \cos^2\frac{At}{h}\int_0^{r/N} C^2(\xi)d\xi\\ - \sin^2\frac{At}{h}\int_0^{r/N} D^2(\xi)d\xi\Bigg].\end{aligned} \tag{8}$$

Wir berechnen jetzt die mittlere Lage der Teilchen

$$\begin{aligned}Q(t) &= \frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N}\tilde{y}_k(t)\\ &= \int_0^1 x\left[C^2(x)\cos^2\frac{At}{h} + D^2(x)\sin^2\frac{At}{h}\right]dx + \text{Fehler}.\end{aligned}$$

Für $t = 0$ ist die mittlere Lage

$$\int_0^1 x C(x)^2 dx + \text{Fehler}. \tag{8'}$$

Für $\frac{At}{h} = \frac{\pi}{2}$, also $t = \frac{\pi h}{2A}$ ist die mittlere Lage

$$\int_0^1 x D^2(x) dx + \text{Fehler}. \tag{9}$$

Für $\frac{At}{h} = \frac{\pi}{4}$ ist

$$Q\left(\frac{h\pi}{4A}\right) = \frac{1}{2}\int_0^1 x(C(x)^2 + D(x)^2)dx + \text{Fehler},$$

die Teilchen schwingen also hin und her. Allgemein ist

$$Q(t+l) - Q(t) = \frac{A}{h}\sin\frac{2A\bar{l}}{h}\left[\int_0^1 xC^2(x)dx - \int_0^1 xD(x)^2 dx\right] + 2\ \text{Fehler},$$

wo $\bar{l}$ ein Zwischenwert mit $0 \leq \bar{l} \leq l$ ist. Es ist also

$$|Q(t+l) - Q(t)| \leq \frac{2A^2}{h^2} l \left|\int_0^1 xC(x)^2 dx - \int_0^1 xD(x)^2 dx\right| + 2\ \text{Fehler}. \tag{10}$$

Ist also

$$l \leq \frac{1}{N}\frac{h^2}{2A^2}\left|\int_0^1 xC(x)^2 dx - \int_0^1 xD(x)^2 dx\right|^{-1},$$

so ist für großes N

$$|Q(t+l) - Q(t)| \leq 4\ \text{Fehler},$$

also ist der Fehler von der Größenordnung $D_N^{1/2}$. Bei unserer Folge r/N ist also der Fehler höchstens $2/\sqrt{N}$, also bleibt die mittlere Lage bis auf einen Fehler von der Größenordnung $2/\sqrt{N}$ ungeändert.

Wählen wir als Beispiel, das nicht notwendigerweise der Schrödingergleichung genügen muß,

$$C(\xi) = cf\left(\xi - \frac{1}{4}\right) \quad \text{und} \quad D(\xi) = df\left(\xi - \frac{3}{4}\right), \tag{11}$$

wo z.B. $f(\xi) = e^{-|k\xi|/2}$, wobei c und d so gewählt werden, daß $C(\xi)$ und

$D(\xi)$ normiert werden:

$$\int_0^1 C^2(\xi)d\xi = \int_0^1 D^2(\xi)d\xi = 1.$$

Man erhält nach leichter Rechnung für die Normierungskonstante

$$c = d = \sqrt{\frac{k}{2 - e^{\frac{-k}{4}} - e^{\frac{-3k}{4}}}}. \tag{12}$$

Für großes k ist daher $C(\frac{1}{4}) \approx \frac{k}{2}$, für $k \approx 0$ hingegen $C(\frac{1}{4}) \approx 1$ und

$$\int_0^1 xC^2(x)dx = \frac{c^2}{k}\left[\frac{1}{2} - e^{\frac{-3k}{4}} + \frac{1}{k}(e^{\frac{-k}{4}} - e^{\frac{-3k}{4}} + 1)\right].$$

Weiters wird

$$\int_0^1 xD^2(x)dx = 1 - \int_0^1 xC^2(x)dx,$$

da ja $D(1-x) = C(x)$ ist. Es wird also

$$Q(x) = \left(\cos^2\frac{At}{h} - \sin^2\frac{At}{h}\right)\int_0^1 xC^2(x)dx + \sin^2\frac{At}{h}. \tag{13}$$

Setzen wir alles ein, so erhalten wir für sehr großes k und $t = 0$ $Q(0) \approx \frac{1}{4}$. Für $t = \frac{\pi h}{2A}$ wird $Q \approx \frac{3}{4}$ und für $t = \frac{\pi h}{4A}$ wird $Q \approx \frac{1}{2}$ bis auf den Fehler von der Größenordnung $1/\sqrt{N}$.

Zur Zeit $t = 0$ ist die mittlere Dichte am kleinsten, sie steigt an bis $\frac{3}{4}$, um dann wieder zurückzuschwingen mit der Periode $\frac{2\pi h}{A}$.

§4

Weitere Beispiele erhalten wir aus der Theorie der Schwankungserscheinungen, einer Theorie, die mit den Namen Smoluchowski und Einstein verbunden ist. Es läßt sich durch das Boltzmannsche Prinzip ausdrücken, daß die Entropie $s = k \log w$, wo w die Wahrscheinlichkeit ist und k die Boltzmannkonstante. Wir interpretieren das so, daß wir eine Dichte $\rho(x) = Ce^{-ks(x)}$ zugrundelegen, wo C einfach ein Normierungsfaktor ist, sodaß wirklich eine Wahrscheinlichkeitsdichte ρ vorliegt. Einstein setzt

$$\rho(x) = C_1 e^{-k(S-S_0)},$$

wo S_0 die maximale Entropie eines Prozesses ist, die an einer Stelle x_0 angenommen wird. Üblicherweise nimmt man an, daß sich $S(x)$ in eine

Reihe an der Stelle x_0 entwickeln läßt. Wir nehmen der Einfachheit halber an, daß $x_0 = 0$ ist, so wird

$$S - S_0 = \frac{a_1}{2}x^2 + \frac{a_2}{3}x^3 + \frac{a^3}{4}x^4 + \cdots$$

Der meist untersuchte Fall ist, daß diese Reihe nur aus dem Glied $(a_1/2)x^2$ besteht, sodaß also die Gaußsche Versteilung

$$\rho(x) = e^{-k_1 x^2}$$

vorliegt. Smoluchowski hat in seiner Theorie der Opaleszenz der Gase den Fall betrachtet, daß nur das Glied $(a_3/2)x^4$ vorkommt und alle vorhergehenden Glieder 0 sind. Betrachten wir allgemein den Fall

$$\rho(x) = Ce^{-x^{2l}}. \tag{1}$$

Für $l = 1$ erhalten wir die Gaußsche Verteilung.

Wenden wir jetzt unsere Theorie an, wo $A = -\infty$ und $B = +\infty$ ist, so müssen wir zunächst abschneiden, d.h. stattdessen eine Dichte $\tilde{\rho}$ betrachten, die so normiert ist, daß

$$C\int_A^B \tilde{\rho}\,(x)dx = 1$$

ist. Den Fehler, den wir dabei machen, können wir leicht abschätzen, es ist ja (wir nehmen $B > 0$ an),

$$\int_B^\infty e^{-x^{2l}}dx < \int_B^\infty e^{-x}dx = e^{-B} < \epsilon.$$

Wir wählen jetzt $\epsilon = D_N$, wo D_N die Diskrepanz der Folge x_k ist, mit

$$B = \frac{1}{\log \epsilon} \quad \text{und} \quad A = -\frac{1}{\log \epsilon}.$$

Dann konstruieren wir dazu nach der vorhergehenden Theorie eine Folge $\tilde{y}_k$, die zu dieser Dichte $\tilde{\rho}$ gehört. Es sei weiter f eine integrierbare Funktion auf $[-\infty, \infty]$, dann erhalten wir

$$\frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N} f\,(\tilde{y}_k) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\rho(x)dx + \text{Fehler}, \tag{2}$$

wo der Fehler mit D_N gegen 0 geht, wenn N gegen geht. Wir betrachten nun zwei Anwendungen.

Es sei K wieder ein Kasten $[a, b]$, wobei wir a und b so klein wählen, daß K im Intervall $[A, B]$ liegt. Sei f wie vorher die charakteristische

Funktion von K, so ist

$$\frac{B(K,l)}{N} = \frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N} \chi_K(\tilde{y}_k) + \text{Fehler}, \tag{3}$$

wobei der Fehler höchstens $4C\,D_N$ ist. $B(K,l)$ ist die Anzahl der Teilchen, die in K liegen und für $l = 1$ liegt die Gaußsche Verteilung vor.

Nehmen wir jetzt die Funktion $f(x,t) = \cos(xt)$, so erhalten wir

$$\frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N} \cos(t\tilde{y}_k) = J_l(t) + \text{Fehler}, \tag{4}$$

wobei $J_l(t) = \int \cos(xt)e^{-x^{2l}}dx$ ist. Nun ist bekannt, daß für $l = 1$ im Fall der Normalverteilung

$$J_1 = \sqrt{\frac{\pi}{2t}}\, e^{-t^2}, \tag{5}$$

also positiv ist. Wenn aber $l > 1$, so hat Felix Bernstein in [3] gezeigt, daß dieses Integral unendlich viele Nullstellen hat. Er verwendet eine Methode, die es vorher S. Hardy ermöglicht hat zu zeigen, daß die Riemannsche Zetafunktion auf der kritischen Geraden unendlich viele Nullstellen hat. Betrachten wir nun eine solche Nullstelle t_l unseres Integrals, so ist also

$$\left|\frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N} \cos(t_l\tilde{y}_k)\right| < 4C\,D_N. \tag{6}$$

d.h. wenn wir mit $N \to \infty$ gehen, geht diese Summe gegen 0. Dies erscheint mir vorallem für dem Fall $l = 2$ (den Fall der Opaleszenz) besonders interssant. Betrachten wir jetzt den Fall der Sedimentation, wo $\rho = e^{-gx}$ im Intervall $[0,\infty], g$ ist die Erdbeschleunigung. Nehmen wir wieder ein Intervall $K = [a,b]$ in einem Intervall $[0,B]$, so erhalten wir die Anzahl $B(N,K)$ der Teilchen $\tilde{y}_k$

$$\frac{B(N,K)}{N} = g\int_K e^{-gx}dx + \text{Fehler} = e^{-ag} - e^{-bg} + \text{Fehler}.$$

Für $a = 0$ erhalten wir $1 - e^{-bx}$ + Fehler.

In der Arbeit von David Jagermann ([2]) wird folgende Aufgabe behandelt:
Sei $\rho(x)$ eine gegebene Dichtefunktion

$$F(x) = \int_0^x \rho(\xi)d\xi,$$

und man approximiere

$$H(t) = \int_0^1 \rho(x) \cos tx \, dx$$

durch eine Summe von der Gestalt

$$S_N = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^{N} \cos t y_j .$$

Diese Aufgabe können wir mit unserer Methode sehr leicht lösen (Jagermann verfährt nach einer anderen komplizierteren Methode). Ebenso die Beispiele, die dort behandelt sind, wie z.B. für $0 \leq x < 1$

$$\begin{array}{lll} \alpha & : & \rho(x) = 2 - 2x \\ \beta & : & \rho(x) = \sqrt{x(1-x)}. \end{array}$$

Ein anderes Beispiel für das Intervall $[0, \infty]$ ist

$$\rho(x) = p x^{p-1} e^{\frac{-x p}{\sigma}} \quad (\sigma > 0).$$

Betrachten wir als weiteres Beispiel die Schrödingergleichung des idealen Gases. Es seien s identische Moleküle von der Masse m und ohne wechselseitige Stöße in einer Röhre von der Länge $l = \pi$ gegeben:

$$\left[\frac{\partial^2}{\partial u_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial u_2^2} + \cdots + \frac{\partial^2}{\partial u_n^2} + \frac{8\pi^2 m}{h^2} E \right] \varphi = 0. \tag{7}$$

Wir setzen $u_j = 2\pi x_j$, dann lautet die Lösung für die Verteilung von s Teilchen in einem idealen Gas, gegeben durch die Wellenfunktion

$$\varphi(x_1, \ldots, x_s) = \sin 2\pi k_1 x_1 \cdot \ldots \cdot \sin 2\pi k_s x_s, \tag{8}$$

und die zugehörige Dichte ist

$$\rho(x_1, \ldots, x_s) = \varphi^2 .$$

Es liegt der Fall vor, wo $\rho(x_1, \ldots, x_s) = \rho_1(x_1) \cdots \rho_s(x_s)$. Dabei liegen die x_j im Intervall $[0, 1]$. Wir können wieder unsere Theorie benützen. Wir konstruieren uns dazu die s-dimensionale Folge $\tilde{y}_k$ und haben also für jede integrierbare Funktion

$$\frac{1}{N} \sum_{k=1}^{N} f(\tilde{y}_k) = \int_{E^s} f(x) \rho(x) dx + \text{Fehler}.$$

Betrachten wir wieder einen Kasten K in E^s, so erhalten wir für die Anzahl der Teilchen B, die im Kasten K:$a \leq x < b$ liegen

$$\frac{B}{N} = \int_a^b J(s) + \text{Fehler},$$

wobei $J(s) = (\sin 2\pi k_1 x_1 \cdot \ldots \cdot \sin 2\pi k_s x_s)^2$.

Das Integral läßt sich leicht ausrechnen, es ist ja

$$\int \sin^2 x dx = \frac{1}{2}\left(x - \frac{\sin 2x}{2}\right).$$

§5

Wir erhalten eine schöne Anwendung, wenn wir eine Formel von Ehrenfest über die Schrödingergleichung

$$i\frac{\partial\varphi}{\partial t} = \Delta\varphi - V(x)\varphi,$$

benützen. Allerdings müssen wir die Rechnung von Ehrenfest wiederholen, da Ehrenfest von vornherein das Intervall $[-\infty, \infty]$ zugrunde gelegt hat. Wir wollen ein beliebiges Intervall $K = [A, B]$ betrachten. Wir benützen die Schrödingergleichung

$$i\frac{\partial\varphi}{\partial t} = \frac{\partial^2\psi}{\delta\psi} - V(x)\psi,$$

wobei V das zugrundegelegte Potential ist. Es sei

$$\bar{x} = \int_K x\psi\bar{\psi}\, dV. \tag{1}$$

Dann ist

$$\begin{aligned} \frac{d\bar{x}}{dt} &= \int_K x\left(\bar{\psi}\frac{\partial\psi}{\partial t} + \psi\frac{\partial\bar{\psi}}{\partial t}\right)dV \\ &= i\int_K x(\bar{\psi}\Delta\psi - \psi\Delta\bar{\psi})dV \\ &= i\int_K x\,\text{div}(\bar{\psi}\text{ grad }\psi - \psi\text{ grad }\bar{\psi})dV \\ &= i\left[\int_{O(K)} x\left(\bar{\psi}\frac{\partial\psi}{\partial u} - \psi\frac{\partial\bar{\psi}}{\partial u}\right)dv - \int_K\left(\bar{\psi}\frac{\partial\psi}{\partial x} - \psi\frac{\partial\bar{\psi}}{\partial x}\right)dV\right] \end{aligned} \tag{2}$$

Bemerkung: Wir haben hier den Gaußschen Integralsatz benützt und zwar in der mehrdimensionalen Form, obwohl wir tatsächlich nur den 1-dimensionalen Fall behandeln, damit die Grundidee deutlich wird. Wir erhalten also

$$\frac{d^2\bar{x}}{dt^2} = J_1 + J_2,$$

wo

$$J_1 = \frac{d}{dt}\int x(\bar{\psi}\ \mathrm{grad}\ \psi - \psi\ \mathrm{grad}\ \bar{\psi})do$$

und

$$J_2 = \int \frac{\partial}{\partial x}(V\psi\bar{\psi}) + \text{Randterme.}$$

Wenden wir uns wieder der partiellen Integration zu, dann erhalten wir

$$\int \left[-\frac{dV}{dx}\right]\psi\,\bar{\psi}\,dV + \text{Randterme.}$$

Wir erhalten also

$$\frac{\partial^2\bar{x}}{\partial t^2} + \int_K \frac{\partial V}{\partial x}\rho dv = \text{Randterme.} \tag{3}$$

Wir nehmen jetzt an, daß diese Terme am Rand klein sind.

Wenn wir der Einfachheit halber annehmen, daß der Kasten 1-dimensional und gerade das Einheitsintervall ist, dann erhalten wir also

$$\left|\frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N}\frac{y_k(t+2h) - 2y_k(t+h) + y_k(t)}{h^2} - \frac{\partial^2\bar{x}}{\partial t^2}\right|$$
$$\leq \frac{10D_N}{h^2} + \left|\frac{1}{h^2}\int_0^1 dx \int_t^{t+h} d\tau \int_\tau^{J+1}\left(\frac{\partial^2\rho(x\sigma)}{\partial\sigma^2} - \frac{\partial^2\rho}{dt^2}\right)d\sigma\right|.$$

Für $t \leq \tau \leq t + 2h$ ist

$$\left|\frac{\partial^2\rho(t)}{\partial t^2} - \frac{\partial^2\rho(\tau)}{\partial\tau^2}\right| \leq \left|\frac{\partial^3\tilde{\rho}}{\partial t^3}\right||\tau - t| \leq 2h\left|\frac{\partial^3\tilde{\rho}}{\partial t^3}\right|,$$

wo $\tilde{\rho}$ der Wert von ρ ist, der an einer Stelle zwischen t und $t+2h$ liegt, also ist

$$\left| \frac{1}{N} \sum_{k=1}^{N} \frac{y_k(t+2h) - 2y_k(t+h) + x_k(t)}{h^2} - \frac{\partial^2 \bar{x}}{\partial t^2} \right|$$
$$\leq 3 \frac{D_N}{h^2} + 2h \max_{\langle t, t+2h \rangle} \left| \frac{\partial^3 \tilde{\rho}}{\partial t^3} \right| .$$

Wir nehmen jetzt $h_N = \sqrt[3]{D_N}$, also erhalten wir

$$\left| \frac{1}{N} \sum_{k=1}^{N} \frac{y_k(t+2h) - 2y_k(t+h) + x_k(t)}{h_N^2} - \int_0^1 \left(-\frac{\partial V}{\partial x} \right) \psi \bar{\psi} \, dx \right|$$
$$\leq 4 \sqrt[3]{D_N} \cdot M_N \gamma^2 ,$$

wo $M_N = \max \frac{\partial^3 |\psi|^2}{\partial t^3}$ ist im Intervall $\langle t, t + 2\sqrt[3]{D_N}\, \gamma \rangle$.

§6

Wir haben bis jetzt bei unserer Diskussion die Kontinuitätsgleichung von ρ benützt. Nehmen wir nun an, daß ρ der Diffusionsgleichung genügt

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left(a \frac{\partial \rho}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial x} (b \rho),$$

wo a und b stetig differenzierbare Funktionen sind, dann erhalten wir, wenn wir wieder einen 1-dimensionalen Kasten $K = [a, b]$ betrachten und die gleiche Bezeichnung wie vorher benützen,

$$\frac{A(t_0 + h, k)}{h} - \frac{A(t_0, k)}{h} = \frac{1}{h} \int_{t_0}^{t_0+h} \left(a(x) \frac{\partial \rho}{\partial x} + b(\rho) \right) \int_a^b dt + \text{Fehler},$$

wo sich die Bezeichnung des Fehlers nicht geändert hat.

Beispiel. Betrachten wir den einfachsten Fall, daß $a = 1$ und $b = 0$, daß also

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = \frac{\partial^2 t}{\partial x^2} .$$

Dann ist also

$$\rho = \frac{1}{\sqrt{\pi t}} e^{-\frac{x^2}{t}},$$

also die Grundfunktion der Wärmeleitungsgleichung. Wir werden wieder abschneiden, indem wir stattdessen die Funktion $\hat{\rho}$ im Intervall $[-A, A]$ betrachten und normieren. Unsere Teilchen $y_r(t)$ sind dann gleich

$$\frac{1}{N} \sum_{l=1}^{N} \left[1 + x_k - \frac{1}{\int_{-A}^{A} e^{-\frac{x^2}{t}} dx} \int_{-A}^{-A+2Ax_l} e^{-\frac{x^2}{t}} dx \right].$$

§7

Kehren wir nun zur Schrödingergleichung zurück. Es seien φ und ψ zwei komplexwertige Funktionen in x und t, die der Schrödingergleichung genügen können, aber nicht müssen, dann können wir, wie schon in den vorherigen Beispielen, die Dichten $\rho = |\varphi|^2$ und $\rho_1 = |\psi|^2$ betrachten. Wir nehmen noch weiter an, daß die Dichten ρ und ρ_1 normiert sind. Wir betrachten nun den Ausdruck

$$\rho_2(x) = |\varphi + \psi|^2,$$

wobei wir annehmen, daß

$$\int |\varphi|^2 = \int |\psi|^2 = 1,$$

Es ist dann

$$\rho_2(x) = |\varphi|^2 + |\psi|^2 + \varphi\bar{\psi} + \bar{\varphi}\psi.$$

Dann ist

$$\int f(x)|\varphi + \psi|^2 dx = \int f(x)|\varphi|^2 dx + \int f(x)|\psi|^2 dx$$
$$+ \int f(x)(\varphi\bar{\psi} + \bar{\varphi}\psi) dx.$$

Es ist also

$$\int f(x)(\varphi + \psi)^2 dx - \int f(x)(\varphi)^2 dx - \int f(x)(\psi)^2 dx$$
$$= \int f(x)(\varphi\bar{\psi} + \bar{\varphi}\psi) dx.$$

Nehmen wir jetzt an, daß

$$\int \varphi \bar{\psi} dx = \int \bar{\varphi} \psi dx = 0$$

ist, daß also φ und ψ orthogonal sind, dann ist

$$\tfrac{1}{2} \int (\varphi + \psi)^2 dx = 1.$$

So sind also $\rho_2 = |\varphi + \psi|^2/2, |\varphi|^2$ und $|\psi|^2$ normierte Dichten. Damit können wir jetzt Integrale von der Gestalt $\int f(x)(\varphi\bar{\psi} + \bar{\varphi}\psi)dx$ berechnen und zu diesen Dichten zugehörige Folgen (Teilchen) y_k^3, y_k^2 bzw. y_k^1. So erhalten wir folgende Formel

$$\frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N} f\,(y_k^3) - \frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N} f\,(y_k^2) - \frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N} f(y_k^1)$$
$$= \int f\,(x)\,(\varphi\bar{\psi} + \bar{\varphi}\psi)\,dx + \text{Fehler},$$
$$\text{Fehler} = \alpha(f)\,(D_N^2)^{\frac{1}{2}} \text{ Max } \rho_2 + (D_N)^{\frac{1}{2}} \text{ Max } \rho + (D_N^1)^{\frac{1}{2}} \text{ Max } \rho_1), \tag{1}$$

wenn f eine Lipschitzfunktion mit der Lipschitzkonstante α ist. Wenn f nur integrierbar ist, dann haben wir α durch die mittlere Schwankung von f zu ersetzen, wo das zugehörige δ das Maximum von D_N^3, D_N^2 oder D_N^1 ist.

Nimmt man z.B. für f die charakteristische Funktion eines Intervalles K wie vorher, so ist die erste Summe die Häufigkeit der Teilchen y_k^3, die sich in K aufhalten, die zweite Summe die Häufigkeit der Teilchen y_k^2 und die dritte Summe die Häufigkeit der Teilchen y_k^1, die sich in K aufhalten, alles zur Zeit t. Die Teilchen y_k^3 sind in K hineinmarschiert, während die Teilchen y_k^2 und y_k^1 K verlassen haben. Die rechte Seite kann also positiv, 0 oder auch negativ sein. Wir haben also einen Übergang zur Zeit t vor uns.

Allgemein wird man jetzt ein normiertes Orthogonalsystem von Funktionen $\varphi_0, \varphi_1, \cdots$ zugrundelegen, dabei setzen wir noch voraus, daß $\varphi_0 = 1$ zum System dazugehört. Dann können wir analog die Summe

$$\sum_{k=1}^{N} (f\,(y_k^3)\ - f\,(y_k^1) - f\,(y_k^2)) \tag{2}$$

bilden, wobei y_k^1 zur Dichte $|\varphi_i|^2$ gehört, y_k^2 zur Dichte $|\varphi_j|^2$ und y_k^3 zur Dichte $\frac{1}{2}|\varphi_i + \varphi_j|^2$. Interessant ist natürlich noch der Fall, daß $\varphi_0 = 1$ ist, dann können wir damit auch die Fourierkoeffizienten $\int f\varphi_j dx$ berechnen, die zum Orthogonalsystem gehören.

Zu einer neuen Fragestellung kommen wir, wenn wir die relativistische Verallgemeinerung der Schrödingergleichung, die sogenannte Klein-Gordongleichung betrachten

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial t^2} - \frac{\partial^2\psi}{\partial x^2} = \psi,$$

dabei haben wir die Lichtgeschwindigkeit $v = 1$ und die Masse des Elektrons gleich 1 gesetzt. Als Dichte ρ definieren wir

$$\rho = -i\left(\psi\frac{\partial\psi^*}{\partial t} - \psi^*\frac{\partial\psi}{\partial t}\right) \quad \text{und}$$
$$j = i\left(\frac{\partial\psi^*}{\partial x}\psi - \frac{\partial\psi}{\partial x}\psi^*\right).$$

Es gilt die Kontinuitätsgleichung

$$\frac{\partial\rho}{\partial t} + \frac{\partial j}{\partial x} = 0.$$

Wir haben uns hier auf den 1-dimensionalen Fall beschränkt. Nun ist aber ρ nicht mehr positiv. W. Pauli und Weißkopf haben in einer berühmten Arbeit gezeigt, daß man ρ in der Form $\rho_2 - \rho_1$ schreiben kann und zwar auf unendlich viele Arten. Setzt man z.B.

$$\psi = -\frac{i}{\sqrt{2}}(\psi_1^* - \psi_2) \quad \text{und}$$
$$\psi^* = -\frac{i}{\sqrt{2}}(\psi_2^* - \psi_1),$$

dann wird

$$\rho = \psi_2^*\psi_2 - \psi_1^*\psi_1,$$

d.h. ρ läßt sich darstellen als Differenz zweier Dichten ρ_2 und ρ_1 im üblichen Sinn, wo

$$\rho_k = |\psi_k|^2,$$

d.h. ρ muß als Ladungsdichte aufgefaßt werden. Jetzt konstruieren wir zu beiden Dichten wieder die Teilchen $x_k^+(t)$ bzw. $x_k^-(t)$ im Sinne von §1, dann haben wir

$$
\begin{aligned}
&\frac{1}{N}\sum_{k=1}^{n} f\left(x_{k_1}(t)\right) - \frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N} f(x_{k_2}(t))\\
&\quad = \frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N} f(x_{k_1}(t)) - f(x_{k_2}(t))\\
&\quad = \int_E f(x)(\rho_2(x) - \rho_1(x)dx)dx + \text{Fehler},
\end{aligned}
$$

wo $|\text{Fehler}| \leq 2\sigma(f,\ \delta)$ und $\delta \leq D_N^{(1/4)}$ ist. E ist das Einheitsintervall, es kann natürlich ein beliebiges Intervall sein.

Ist K z.B. wieder ein Einheitsintervall von E und ist $B_H^+(K,t)$ die Anzahl der Teilchen x_K^+, welche sich in K zur Zeit t befinden und $B_N^-(K,t)$ die Anzahl der Teilchen x_k^-, welche sich in K zur Zeit t befinden, so ist

$$\frac{1}{N}\left(B_N^+(K,t) - B_N^-(K,t)\right) = \int_K \rho(x,t)dx + \text{Fehler},$$

wo $|\text{Fehler}| \leq 2D_N^{(1/4)}$ ist. Setzen wir

$$B_N(K,t) = B_N^+(K,t) - B_N^-(K,t),$$

dann erhalten wir wieder

$$\frac{1}{N}\left(B_N(K,t+h) - B_N(K,t)\right) = \int_t^{t+h} d\tau \int_K \operatorname{div} j dx + \text{Fehler},$$

wo a und b die Endpunkte von K sind. Wir können x_K^+ als die Teilchen mit positiver Ladung und x_K^- als die Teilchen mit negativer Ladung auffassen.

Betrachten wir die Diracsche Gleichung ($c = 1$ gesetzt)

$$
\begin{aligned}
&i\left(\frac{\partial\varphi}{\partial t} - \frac{\partial\psi}{\partial x}\right) + \sqrt{E-p^2}\varphi = 0\\
&i\left(\frac{\partial\psi}{\partial t} - \frac{\partial\varphi}{\partial x}\right) - \sqrt{E-p^2}\psi = 0\\
\text{bzw.}\quad &i\left(\frac{\partial\beta}{\partial t} - \frac{\partial\gamma}{\partial x}\right) - \sqrt{E-p^2}\beta = 0\\
&i\left(\frac{\partial\gamma}{\partial t} - \frac{\partial\beta}{\partial x}\right) + \sqrt{E-p^2}\gamma = 0.
\end{aligned}
$$

Es sei

$$a = \frac{p}{E}, \quad \alpha = px - Et, \quad m = \sqrt{E - p^2}.$$

Es ist dann die Lösung

$$\begin{aligned}
\varphi &= e^{i\alpha} - ae^{-i\alpha}, \\
\psi &= ae^{i\alpha} + e^{-i\alpha}, \\
\beta &= e^{i\alpha} + ae^{-i\alpha}, \\
\gamma &= -ae^{i\alpha} + e^{-i\alpha}.
\end{aligned}$$

Wir beschränken uns auf die erste Gruppe φ, ψ. Dann sei

$$\begin{aligned}
\rho(y, t) &= |\varphi|^2 + |\psi| = 2|\varphi|^2 = 4(1 + a^2 + 2a\cos 2x) \\
\frac{\partial \rho}{\partial t} &= -(8a + \sin 2x)E
\end{aligned}$$

und

$$j(x, t) = \frac{1}{2}(\bar{\varphi}\psi - \varphi\bar{\psi}).$$

Es ist dann

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial j}{\partial x} = 0.$$

Wir können dann leicht die zugehörigen Teilchen $y_k(t)$ angeben.

$$y_k(t) = \frac{1}{N}\sum_{l=1}^{N}[1 + x_k - F(x_l)],$$

wo $F(x) = \int_0^x \rho(x, t)dx$.

Bei diesem Beispiel können wir dann die Überlegung von §2 in ungeänderter Form anwenden.

§8

Wir kommen zu einer weiteren interessanten Fragestellung. Es sei eine Dichte ρ in irgendeinem Intervall gegeben. Der Einfachheit halber nehmen wir wieder das Einheitsintervall. Wir bilden nun außer der Dichte ρ, die nicht unbedingt normiert sein muß, die Menge aller Dichten von der Gestalt ρ^β, wo $\beta > 0$ ist. Wir betrachten dazu die Verteilungsfunktion

(Zustandsfunktion) Φ_β

$$\Phi_\beta = \int_0^x \frac{\rho^\beta(\xi)d\xi}{A_\beta}, \quad \text{wo} \quad A_\beta = \int_0^1 \rho^\beta(\xi)d\xi.$$

Wir führen nun folgende thermodynamische Begriffe ein

Die Temperatur $T = \frac{1}{\beta}$, die freie Energie $F(\beta) = -\frac{1}{\beta}\log A_\beta$,

die innere Energie $U(\beta) = -\int_0^1 \frac{(\log\rho)\rho^\beta d\xi}{A_\beta}$,

die Entropie $S = \frac{\partial F}{\partial(\frac{1}{\beta})}$,

die spezifische Wärme $C = -\beta^2 \frac{\partial U}{\partial \beta}$.

Hängt ρ noch von weiteren Parametern $\alpha_1, \dots, \alpha_L$ ab, dann bezeichnen wir als die zugehörige Kraft

$$k_j = \frac{\int_0^1 \frac{\partial(-\log\rho)}{\partial\alpha_j}\rho^\beta d\xi}{A_\beta}.$$

Betrachten wir die zugehörigen Teilchen

$$y_k(\beta) = \frac{1}{N}\sum_{k=1}^N [1 + x_k - \Phi_\beta(x_L)], \quad \text{für } k = 1, \dots, N,$$

die auch von α abhängen können, wenn ρ von α abhängt. Wir schreiben dann diesen N Teilchen T als Temperatur, U als innere Energie, F als freie Energie, S als Entropie und C als spezifische Wärme zu. Die Wärme selbst ist dann der Pfaffsche Ausdruck

$$\omega = \delta Q = dU + \sum_{j=1}^L k_j d\alpha_j.$$

Ein einfaches Beispiel, wo man das alles ausrechnen kann, ist $\rho(x) = x + \alpha$ für x zwischen 0 und 1.

Der Vorschlag, daß man mit ρ auch Potenzen von ρ untersuchen soll, findet sich in [7].

Wir wollen zum Schluß eine Bemerkung zur sogenannten Interferenz der Wahrscheinlichkeiten in der Quantenmechanik vom Standpunkt der Gleichverteilung aus machen.

Es seien φ, ψ Lösungen einer Schrödingergleichung, dann ist $|\varphi^2|, |\varphi^2|$ die zugehörige Wahrscheinlichkeitsdichte. Nun ist mit φ bzw. ψ auch $e^{i\alpha}\varphi, e^{i\alpha}\psi$ Lösung.

Es sei nun (α_k, β_k) eine gleichverteilte Folge mit Diskrepanz D_N. Es ist also auch

$$e^{i\alpha_k}\varphi(x) + e^{i\beta_k}\psi(x)$$

für $k = 1, 2, \ldots$ Lösung der Schrödingergleichung. Wir bilden nun

$$\Sigma = \frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N} |e^{2\pi i\alpha_k}\varphi(x) + e^{2\pi i\beta_k}\psi(x)|^2 dx.$$

Es ist dann für $|\vartheta| \leq 1$:

$$\frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N} e^{2\pi i(\alpha_k - \beta_k)} = \int_0^1\int_0^1 e^{2\pi i(\alpha-\beta)} d\alpha d\beta + \vartheta D_N.$$

Wir erhalten also

$$\Sigma = |\varphi|^2 + |\psi|^2 + \vartheta D_N.$$

Es ist also

$$|\varphi|^2 + |\psi|^2 - D_N \leq \Sigma \leq |\varphi|^2 + |\psi|^2 + D_N; .$$

Ist aber (α_k, β_k) nicht gleichverteilt, also z.B.

$$\beta_k = \eta + a_k,$$

wo η fest ist, so erhalten wir

$$\Sigma = |\varphi|^2 + |\psi|^2 + e^{2\pi i\eta}\varphi\bar{\psi} + e^{2\pi i\eta}\bar{\varphi}\psi.$$

Ist z.B. $\eta = 0$, so ist

$$\Sigma = |\varphi + \psi|^2,$$

also keine Interferenz.

Wir können diese Überlegung auch auf den Fall übertragen, daß ein gleichverteilter Vektor $)\alpha(t), \beta(t))$ in $0 \leq t \leq T$ mit Diskrepanz $D(T)$ vorliegt. Wir bilden uns nun

$$e^{2\pi i\alpha(t)}\varphi(x), e^{2\pi i\beta(t)}\psi(x).$$

Es ist dann

$$\begin{aligned}\Sigma &= \frac{1}{T}\int_0^T \left|e^{2\pi i\alpha(t)}\varphi(x) + e^{2\pi i\beta(t)}\psi(x)\right|^2 dt \\ &= |\varphi|^2 + |\psi|^2 + \vartheta D_N(T),\end{aligned}$$

denn es ist analog wie vorher

$$\begin{aligned}&\frac{1}{T}\int_1^T e^{2\pi i(\alpha(t)-\beta(t))}dt\\&=\int_0^1\int_0^1 e^{2\pi i(\xi-\eta)}d\xi d\eta+\vartheta D(T)\\&=\vartheta D(T).\end{aligned}$$

Wir können statt der Schrödingergleichung auch die Heisenbergschen Matrizen nehmen.

Es seien L-reihige *komplexe* Matrizen $A=(a_{jm}), B=(b_{mk})$ gegeben, dabei seien die Elemente beider Matrizen komplexe Zahlen. Es sei weiter C das Matrizenprodukt von AB. Es ist

$$C=\sum_{m=1}^{L} c(j,k,m),$$

wobei

$$c(j,k,m)=a_{jm}b_{mk}$$

ist. Es sei nun $(\varphi_1^r,\ldots,\varphi_L^r)$ eine L-dimensionale gleichverteilte Folge mit der Diskrepanz D_N^L. Wir bilden uns mit Heisenberg die gegenüber C abgeänderte Matrix

$$C(r)=\sum_{m=1}^{L} c(j,k,m)e(\varphi_m^r),$$

wobei $e(\alpha)=e^{2\pi i\alpha}$ ist. Es ist dann

$$\frac{1}{N}\sum_{r=1}^{N}|C(r)|^2=\frac{1}{N}\sum_{r=1}^{N}\sum_{m,m'}^{L} c(j,k,m)c(j,k,m')e(\varphi_m^r-\varphi_m'^r).$$

Es ist dann wieder

$$\frac{1}{N}\sum_{r=1}^{N} e(\varphi_m^r-\varphi_{m'}^r)=\int_{E^L} e(\varphi_m-\varphi_{m'})d\varphi+\vartheta_{m,m'}D_N^L,$$

wo $d\varphi$ das Volumselement $d\varphi_1\cdots d\varphi_L$ ist. Dabei ist $|\vartheta_{m,m'}|\le 1$. Es ist das Integral rechts nur dann von Null verschieden, wenn $m=m'$ ist, also ist

$$|c(j,k,m)|^2=|a_{jm}|^2|b_{mk}|^2.$$

Wir erhalten also

$$\frac{1}{N}\sum_{r=1}^{N}|C(r)|^2 = \sum_{m=1}^{L}|a_{jm}|^2|b_{mk}|^2 + \text{Rest},$$

($|A|$, $|B|$ die Beträge von A und B) wobei

$$|\text{Rest}| \leq (|A|\,|B|)^2 D_N^L.$$

Wir wollen noch ein Beispiel aus der Optik, nämlich die Beugung behandeln und betrachten die Dichte

$$\rho(x) = \frac{1}{C}|J(x)|^2,$$

wo (C der Normierungsfaktor)

$$J(x) = \int\limits_{|\xi|\leq\frac{1}{2}} e(2\pi i(t - x\xi))d\xi$$

(dabei ist $e(\alpha) = e^{\alpha}$).

Es ist

$$|J(x)|^2 = \left|\frac{1}{2\pi ix}(e^{\pi ix} - e^{-\pi ix})\right|^2 = \left(\frac{\sin \pi x}{\pi x}\right)^2.$$

Es ist $J(0) = 1$, welches der maximale Wert von $|J(x)|$ ist.

Weiter ist

$$C = \int\limits_0^\infty \rho(x)dx = \int\limits_0^\infty \left(\frac{\sin x}{x}\right)^2 dx = \frac{1}{2}.$$

Es sei $\epsilon > 0$ und $K > 10$ so gewählt, daß

$$\frac{2}{\pi}\int\limits_K^\infty \left(\frac{\sin x}{x}\right)^2 dx < \epsilon.$$

Dies ist sicher der Fall, wenn

$$\int\limits_K^\infty \frac{dx}{x^2} = \frac{1}{K} < \frac{\pi\epsilon}{2}$$

ist. Wir nehmen nun eine gleichverteilte Folge (x_k) modulo 1 mit Diskrepanz D_N und konstruieren eine gleichverteilte Folge (y_k) in $\langle 0, K\rangle$ zur Dichte ρ (man könnte sie Quantionen nennen)

$$y_k = \frac{1}{N}\sum_{l=1}^{N}\left[1 + x_k - \frac{1}{A}\int\limits_0^{Kx_l} \rho(t)dt\right]$$

([ ] Gaußklammern, A Normierungskonstante).

Ihre Diskrepanz $\hat{D}_N$ ist höchstens

$$D_N^{\frac{1}{3}}.$$

Es gilt dann für jede Funktion f von beschränkter Variation $V(f, K)$ in $\langle 0, K\rangle$

$$\frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N} f(y_k) = \frac{1}{A}\int_0^K f(x)\rho(x)dx + \vartheta V(f, K)D_N^{\frac{1}{3}}$$

$(|\vartheta| \leq 1)$.

Ist f nur quadrierbar, so ist V durch die Schwankung $\sigma(f, K)$ in $\langle 0, K\rangle$ zu ersetzen. Dabei ist

$$A = \int_0^K \rho(x)dx.$$

Es ist

$$\left|A - \int_0^\infty \rho(x)dx\right| \leq \frac{1}{K} < \frac{\pi}{2}\epsilon,$$

also ist das Integral, wenn f in $\langle 0, \infty\rangle$ definiert ist,

$$\left|\int_0^\infty f(x)\rho(x)dx - 2\int_0^K f(x)\rho(x)dx\right| \leq 8\frac{M(f)}{K},$$

wo $M(f)$ eine obere Schranke für $|f|$ in $\langle 0, \infty\rangle$ ist. Es ist also

$$\left|\frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N} f(y_k) - 2\int_0^\infty f(x)\rho(x)dx\right| \leq V(f, K)D_N^{\frac{1}{3}} + M(f)\epsilon.$$

Wir wählen nun

$$\epsilon = D_N^{\frac{1}{3}}$$

und erhalten also

$$\left|\frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N} f(y_k) - 2\int_0^\infty f(x)\rho(x)dx\right| \leq D_N^{\frac{1}{3}}(V(f, K) + M(f)).$$

Es ist nun zu beachten, daß die Dichte $\rho(x)$ Nullstellen für $x > 0$ besitzt (also nicht stets **positiv** ist), und zwar an der Stelle

$$\tilde{x}_n = n,$$

für $1, 2, 3, \ldots,$ also unendlich viele, allerdings in endlichen Intervallen $\langle 0, K\rangle$ nur **endlich viele**, nämlich höchstens $[K]$ ([ ] Gaußklammern).

Weiters besitzt $\rho(x)$ an den Stellen $\hat{x}_n$ die relativen Extrema

$$\hat{x}_n = n + \frac{1}{2}$$

mit den Werten

$$\rho(\hat{x}_n) = \frac{2}{\left(\pi\left(n+\frac{1}{2}\right)\right)^2}. \quad *$$

Wir betrachten nun L Stellen

$$\xi + z_L$$

mit $z_0 = 0$ und $z_1 \cdots z_{L-1}$, wo diese Stellen noch beliebig sind, und bilden uns

$$\begin{aligned}
\hat{\rho}(x) &= \left| \frac{1}{L} \sum_{l=0}^{L-1} \int_{|\xi|\le\frac{1}{2}} e(2\pi i(t - x(\xi + z_L)))\, d\xi \right|^2 \\
&= \left| \frac{1}{L} \sum_{l=0}^{L-1} e(-2\pi i x z_l) \int_{|\xi|\le\frac{1}{2}} e(-2\pi i x\xi)\, d\xi \right|^2 \\
&= \rho(x) \left| \frac{1}{L} \sum_{l=0}^{L-1} e(2\pi i x z_l) \right|^2 .
\end{aligned}$$

Betrachten wir den Fall, daß

$$z_l = l\, c,$$

wo l natürliche Zahlen sind. Es ist

$$\frac{1}{L} \sum_{l=0}^{L-1} e(2\pi i z_l) = \frac{1}{L} \frac{e(2\pi i L c x) - 1}{e(2\pi i c x) - 1}.$$

Es wird also

$$\left| \frac{1}{L} \sum_{l=0}^{L-1} e(2\pi i z_l) \right|^2 = \frac{1}{L^2} \left| \frac{\sin \pi L c x}{\sin \pi c x} \right|^2 .$$

Es wird also die noch nicht normierte Dichte

$$\hat{\rho}(x) = \frac{1}{L^2} \rho(x) \left(\frac{\sin \pi L c x}{\sin \pi c x} \right)^2 .$$

* All *diese* Stellen beeinflussen die Häufigkeit der y_k in ihren Umgebungen.

also

$$\hat{\rho}(x) = \frac{1}{L^2}\left(\frac{\sin\,\pi x}{\pi x}\,\frac{\sin\,\pi L c x}{\sin\,\pi c x}\right)^2.$$

Setzen wir

$$C(c, L) = \int_0^\infty \hat{\rho}(x)dx = \frac{1}{L^2}\int_0^\infty \left(\frac{\sin\,\pi x}{\pi x}\,\frac{\sin\,\pi L c x}{\sin\,\pi c x}\right)^2 dx,$$

so ist die normierte Dichte

$$\tilde{\rho}(x) = \frac{1}{C}\hat{\rho}(x).$$

Für $c = 1$ und $L = 2$ (**Doppelspalt**) erhalten wir

$$C(1, 2) = \int_0^\infty \left(\frac{\sin\,\pi x}{\pi x}\,\frac{\sin\,2\pi x}{\sin\,\pi x}\right)^2 = 2\pi,$$

also ist

$$\tilde{\rho}(x) = \frac{1}{2\pi}\left(\frac{\sin\,2\,\pi x}{\pi x}\right)^2.$$

Wir bestimmen die zugehörigen Quantionen $\tilde{y}_k$ bei gleichem K wie vorher

$$\tilde{y}_k = \frac{K}{N}\sum_{l=1}^{N}\left[1 + x_l - \frac{1}{A}\int_0^{K x_l} \tilde{\rho}(t)dt\right].$$

Nullstellen in $\tilde{\rho}$ sind jetzt die Stellen $\frac{n}{2}\,(n = \frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}, \ldots,)$. Die Extrema sind jetzt an den Stellen $\frac{1}{2}\,(n + \frac{1}{2})$.

Ersetzen wir jetzt x durch γx, wo γ eine reelle, positive Zahl ist, dann hängt ρ bzw. $\tilde{\rho}$ noch von γ ab. Die Nullstellen $\tilde{x}_n$ der Dichten liegen, da ja

$$\gamma \tilde{x}_n = \frac{n}{2}$$

wird, an den Stellen

$$\tilde{x}_n = \frac{n}{2\gamma}$$

und die Extremstellen an den Stellen

$$\frac{n + \frac{1}{2}}{2\gamma}.$$

Es ist z.B. bei Brechung und Reflexion

$$\gamma = \frac{\sin\,\alpha}{c} - \frac{\sin\,\beta}{c'},$$

so ist $\hat{\rho}(\gamma x)$ maximal für die Stellen, wo

$$\frac{\sin\,\alpha}{c} - \frac{\sin\,\beta}{c'} = 0.$$

Ist $c = c'$, $\alpha = 0$ an der Stelle

$$\gamma = \frac{\sin\,\beta}{c}.$$

Wir wollen diese Betrachtungen verallgemeinern und zugleich ins Mehrdimensionale übertragen (der zwei- bzw. dreidimensionale Fall ist in der Physik wichtig). Es sei jetzt $m \geq 1$ die Dimension, B ein konvexer Körper (für $m = 2$ eine Scheibe) mit dem Koordinatenursprung im Mittelpunkt von B (wenn vorhanden), dann sei jetzt

$$J(x) = \left| \int_B e(2\pi i(t - \langle x\xi \rangle) d\xi \right|,$$

wo $\langle x\xi \rangle$ das skalare Produkt

$$x_1\xi_1 + \cdots + x_m\xi_m$$

und $d\xi = d\xi_1 \cdots d\xi_m$ das Volumselement ist.

$$\rho(x) = \frac{1}{C} |\, J(x)|^2$$

ist die Dichte. Es ist

$$C = \int_{R_m} |\, J(x)|^2 dx$$

über den ganzen Raum R^m erstreckt.

Das Integral existiert sicher, wenn B ein konvexer Polyeder, insbesondere ein Quader (für $m = 2$ z.B. ein Rechteck ist), und für konvexe Körper, die genügend glatt (z.B. Kugeln) sind.

Für Quader

$$|\xi_1| \leq \frac{1}{2} \cdots |\xi_m| \leq \frac{1}{2}$$

erhalten wir

$$\rho(x) = \prod_{j=1}^{m} \left(2\frac{\sin\,\pi x_j}{\pi x_j} \right)^2.$$

Ist überhaupt B ein Produkt von mehreren konvexen Körpern $B_1 \times B_2 \times \cdots \times B_r$, wo die B_j verschiedene Dimensionen haben können, wenn nur die Gesamtdimension m ist, so zerlegt sich J in $J_1 \times J_2 \times \cdots \times J_r$.

Liegen wieder zusätzlich L Stellen $z_0 = 0, z_1, \cdots z_L$ in R^m vor, so erhalten wir

$$\begin{aligned}\hat{\rho}(x) &= \left| \frac{1}{L} \sum_{l=0}^{L-1} \int_B e(2\pi i(t - \langle x, \xi + z_l \rangle)) d\xi \right|^2 \\ &= \left| \frac{1}{L} \sum_{l=0}^{L-1} e(\langle x, z_l \rangle) \right| \left| \int_B e(2\pi i \langle x, \xi \rangle) d\xi \right|^2 .\end{aligned}$$

Der Fall, daß die z_l ein Gitter bilden (Kristallgitter im R^3), ist besonders wichtig. Man vergleiche die physikalische Literatur.

Der Verfasser hat sich mit dem Fall $l = 1$ im bezug auf das zugehörige Integral, insbesondere über das asymptotische Verhalten und auch im bezug auf die Nullstellen in den Arbeiten „Über Integrale auf konvexen Körpern I“, Monatshefte für Mathematik 54 (1956) 1–31 und Teil II im gleichen Band beschäftigt.

Wenn die Stellen z_l aber 'random' sind, so liegt wieder Interferenz vor. Nehmen wir an, wir haben eine l-dimensionale Folge z_l^k, welche gleichverteilt zur Dichte $\sigma(x_1) \cdots \sigma(x_l)$ ist, wo σ eine eindimensionale Dichte ist, mit Diskrepanz D_N^σ, so betrachten wir $(c = 1)$

$$\begin{aligned}\sum_N &= \frac{1}{N} \sum_{k=1}^{N} \left| \frac{1}{L} \sum_{l=1}^{L-1} e(2\pi i x z_l^k) \right|^2 \\ &= \frac{1}{L^2} \sum_{l=0}^{L-1} \sum_{m=1}^{L-1} \frac{1}{N} \sum_{k=1}^{N} e(2\pi i x (z_l^k - z_m^k)).\end{aligned}$$

Nun ist $l \neq m$

$$\frac{1}{N} \sum_{k=1}^{N} e(2\pi i x (z_l^k - z_m^k) = \left| \int_E e(2\pi i x z) dz \right|^2 + \vartheta D_N .$$

Wir erhalten also

$$\sum_N = \frac{1}{L} + \frac{L-1}{L} \left(\left| \int_E e(2\pi i x z) \sigma(z) dz \right|^2 + \vartheta D_N \right).$$

Es wird also

$$\tilde{\rho}(x) = \frac{1}{L} \rho(x) \left(1 + (L-1) \left(\left| \int_E e(2\pi i x z) \sigma(z) dz \right|^2 + \vartheta D_N \right) \right).$$

Für $\sigma(z) = 1$ wird das Integral

$$\left(\frac{\sin \pi x}{\pi x}\right)^2.$$

A. Einstein hat immer die Meinung vertreten, daß wir nur Mittelwerte beobachten können. Diese Mittelwerte werden durch die Häufigkeiten des Auftretens der zugehörigen Ereignisse mit einem gewissen Fehler festgestellt. Von diesem Standpunkt aus kann man Ereignisse durch Wellen bzw. Teilchen erklären. Damit will der Verfasser als Mathematiker nur zum Ausdruck bringen, daß beide Ansichten gleichberechtigt sind. Welcher Standpunkt in der Realität vorkommt, kann nur der Physiker entscheiden.

Ein schlagendes Beispiel ist der Lichtdruck.
Es sei (ein Koordinatensystem sei eingeführt) $x = 0$ die Ebene eines Metallspiegels, $z = 0$ die Einfallsebene eines senkrecht einfallenden Strahls und des reflektierenden Strahles, so haben wir für die elektrische Feldstärke E_e und die magnetische Feldstärke H_e des einfallenden Strahles

$$\begin{aligned} E_e &= \left(0, \quad A \sin 2\pi\nu\left(t + \frac{x}{c}\right), \quad 0 \quad\right) \\ H_e &= \left(0, \quad 0, \quad A \sin 2\pi\nu\left(t + \frac{x}{c}\right)\right) \end{aligned}$$

und für die analogen Feldstärken E_r, H_r des reflektierenden Strahls

$$\begin{aligned} E_r &= \left(0, \quad -A \sin 2\pi\nu\left(t - \frac{x}{c}\right), \quad 0 \quad\right) \\ H_r &= \left(0, \quad 0, \quad A \sin 2\pi\nu\left(t - \frac{x}{c}\right)\right), \end{aligned}$$

also insgesamt

$$E = E_e + E_r, \quad H = H_e + H_r$$

$$\begin{aligned} E &= \left(0, \quad A\left(\sin 2\pi\nu\left(t + \frac{x}{c}\right) - \sin 2\pi\nu\left(t - \frac{x}{c}\right)\right), \quad 0\right) \\ H &= \left(0, \quad 0, \quad A\left(\sin 2\pi\nu\left(t + \frac{x}{c}\right) + \sin 2\pi\nu\left(t - \frac{x}{c}\right)\right)\right). \end{aligned}$$

Dann erhalten wir den Druck pro Flächeneinheit auf den Spiegel

$$f = (A \sin 2\pi\nu t)^2,$$

also den Gesamtdruck

$$p = \nu \int_0^{\frac{1}{\gamma}} f\, dt = \frac{A^2}{4\pi}.$$

Konstruieren wir wieder mit Hilfe einer gleichverteilten Folge (x_k) mit Diskrepanz D_N eine gleichverteilte Folge (y_k) zur Dichte $(\sin 2\pi\nu t)^2$, so erhalten wir für jede Funktion f von beschränkter Variation $V(f)$

$$\frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N} f(y_k) = \nu \int_0^{\frac{1}{\nu}} f(t) \sin^2 2\pi\nu t dt + \vartheta V(f) D_N^{\frac{1}{3}}.$$

Es sei I ein Zeitintervall $\langle \alpha, \beta \rangle$ in $\langle 0, \frac{1}{\nu} \rangle$, so ist $H_N(\langle \alpha, \beta \rangle)$ die Anzahl der Treffer der Quantionen, welche den Spiegel treffen, also gleich

$$\sum_{k=1}^{N} i(\langle \alpha, \beta \rangle, y_k)$$

und für die relative Häufigkeit

$$h_n(\langle \alpha, \beta \rangle) = \frac{1}{N} H_N(\langle \alpha, \beta \rangle)$$

gilt

$$\left| h_n(\langle \alpha, \beta \rangle) - \nu \int_\alpha^\beta \sin^2 2\pi\nu t \right| \leq D_N^{\frac{1}{3}}.$$

Literatur

Hlawka, E., Mück, R., *A Transformation of Equidistributed Sequences*, Applications of Number Theory to Numerical Analysis, Academic Press, London – New York, 1972, 371–388.

Hlawka, E., Mück, R., *Über eine Transformation von gleichverteilten Folgen II*, Computing 9 (1972) 127–138.

Hlawka, E., *Discrepancy and Riemann Integration*, Studies in Pure Mathematics (Papers presented to Richard Rado), Academic Press, London – New York, 1971, 121–129.

Hlawka, E., *Selecta*, P. Gruber, W. Schmidt (eds.), Springer-Verlag, Berlin – Heidelberg – New York, 1990.

Bernstein, F., *Über das Fourierintegral* $\int_0^\infty e^{-x^4} \cos tx\, dx$, Math. Annalen 79 (1918) 265–268.

Jagermann, D., *Cosine sums approximation of systems of array antenna*, The Bell System Journal 44 (1965), Recent Monograph of Bell Systems Technical Papers, 1761–1767.

Bangerter, H., *Temperaturmittelwert bei periodisch veränderlichen Massen*, Ingenieurarchiv 7 (1936) 99–104.

Anschrift des Verfassers: Prof. Dr. Edmund Hlawka, Margaretenstraße 27/II/9, A-1040 Wien.