Sitzungsber. Abt. II (1998) 207: 103–122

Eine Bemerkung zum Begriff des Standardmodells für den Peanoformalismus*

Von

C. C. Christian

(Vorgelegt in der Sitzung der math.-nat. Klasse am 15. Oktober 1998
durch das w. M. Curt C. Christian)

Wir erläutern zunächst den Begriff der schwachen metamathematischen Induktion und dann den der starken metamathematischen Induktion.

Sei $A(x)$ eine Formel des Peanoformalismus Z_P bzw. einer Erweiterung Z_P^+ desselben, sei M ein Normalmodell für Z_P (bei dem das Gleichheitssymbol als mengentheoretische Gleichheit interpretiert ist), so wollen wir eine Menge P definiert durch $P = \{u \in |M| | A_{\langle M, v^x/u \rangle} = 1\}$ eine „Z_P-Formel basierte“ Menge nennen.

Die mit $A(x)$ gebildete Z_P^+-Formel

$$A(0) \wedge \bigwedge_x \cdot A(x) \to A(S(x)) \cdot \to \bigwedge_x A(x)$$

ist ein formales Z_P-Axiomenschema der Mathematischen Induktion, das voraussetzungsgemäß – $(\mathrm{Mod}_{\mathrm{norm}}(M, Z_P^+))$ – in M gültig ist. Die

*Aus Anlaß des 150. Todestages von Bernard Bolzano.

Auswertung ergibt:

$$\mathcal{A}_{\langle M, v^x/0_M\rangle} = 1 \wedge \cdot \bigwedge_{u\in|M|} \mathcal{A}_{\langle M, v^x/u\rangle} = 1 \rightarrow \mathcal{A}_{\langle M, v^x/S_M(u)\rangle} = 1 \cdot \dot{\rightarrow}$$
$$\dot{\rightarrow} \bigwedge_{u\in|M|} \mathcal{A}_{\langle M, v^x/u\rangle} = 1$$

und daraus: $0_M \in P \wedge \bigwedge_{u\in|M|} \cdot u \in P \rightarrow S_M(u) \in P \cdot \rightarrow \bigwedge_{u\in|M|} u \in P$.

Wenn P eine „Z_P-Frm basierte“ Menge ist, sprechen wir von einem schwachen metamathematischen Induktionsprinzip.

$$\mathrm{Mod}_{\mathrm{norm}}(M, Z_P^+) \rightarrow \bigwedge_{P\in Z_P-\mathrm{Frm\ Bas}} : 0_M \in P \wedge \bigwedge_{u\in|M|} \cdot u \in P \rightarrow$$
$$\rightarrow S_M(u) \in P \cdot \rightarrow \bigwedge_{u\in|M|} u \in P :$$

Wir definieren nun den Begriff der starken metamathematischen Induktivität.

Intpr Str $(M, Z_P^+) \dot{\rightarrow}$ Stark Indukt $(M) \leftrightarrow \bigwedge_{P\in Z_P-\mathrm{Frm\ Bas}} \cdot 0_M \in P \wedge \bigwedge_{u\in|M|} \cdot u \in P \rightarrow S_M(u) \in P \cdot \rightarrow \bigwedge_{u\in|M|} u \in P$.

Der Begriff des Standardmodells ist definiert als Stark Induktives Normalmodell.

StandMod (M, Z_P^+) $:\leftrightarrow$ $\mathrm{Mod}_{\mathrm{norm}}(M, Z_P^+) \wedge$ Stark Ind (M).

Anmerkung:

$$\mathrm{Wegen}(a = b)_{\langle M, v\rangle} = 1 \leftrightarrow \chi \doteqdot (a_{\langle M, v\rangle}, b_{\langle M, v\rangle}) = 1$$
$$\leftrightarrow a_{\langle M, v\rangle} \doteqdot b_{\langle M, v\rangle}$$
$$\leftrightarrow a\begin{bmatrix} 0 & S & x_i \\ 0_M & S_M & u_i \end{bmatrix} \doteqdot b\begin{bmatrix} 0 & S & x_i \\ 0_M & S_M & u_i \end{bmatrix}$$

ist $\mathcal{A}_{\langle M,v\rangle} = 1$ äquivalent einer Formel, die aus der objektsprachlichen Formel $\mathcal{A}$ durch Ersatz der Junktoren durch Metajunktoren, der Quantoren durch $|M|$-relativierte Metaquantoren, der Symbole 0 und S und $=$ durch die M-Interpretation 0_M und S_M und $\doteqdot$ hervorgeht.

Schließlich definieren wir als Finite Accessibilität:

$$\mathrm{StandMod}(N, Z_P) \ddot{\rightarrow} \mathrm{IntprStr}(M, Z_P^+) \dot{\rightarrow} \mathrm{FinAccess}(M) :$$
$$\leftrightarrow \bigwedge_{u\in|M|} \bigvee_{k\in|N|} u = S_M^{(k)}(0_M)$$

Die rechte Seite der Äquivalenz drückt die Erreichbarkeit jedes Elementes von $|M|$ vom 0_M-Element durch eine endliche Anzahl von S_M-Anwendungen aus.

Die Bedeutung des Standardmodells liegt im folgenden:

Betrachtet man etwa den 1. Unvollständigkeitssatz in der Rosserschen Form, so kann er wegen $\bigwedge_{\cdot\, T \in \mathrm{Theorie}^I} \mathrm{Cst}\, T \leftrightarrow \bigvee_M \mathrm{Mod}_{\mathrm{norm}}(M, T)$. so angeschrieben werden:

$$\bigvee_M \mathrm{Mod}_{\mathrm{norm}}(M, Z_P) \rightarrow \not\vdash_{\overline{Z_P}} Ro^{\triangle} \wedge \not\vdash_{\overline{Z_P}} \neg Ro^{\triangle}$$

($Ro^{\triangle}$ bedeutet die diagonalisierte Rosserformel; $Gö^{\triangle}$ bedeutet im folgenden die diagonalisierte Gödelformel)

Durch ein (Normal) Modell sind lediglich schwache Metamathematische Induktionen verbürgt; beim Beweis des obigen Unvollständigkeitssatzes wird aber das durch starke Metamathematische Induktion bewiesene Repräsentationstheorem rekursiver Relationen verwendet.

Ebenso werden zahlreiche andere einfache Sätze wie

$$\bigwedge_{k, m \in |n|} \vdash_{\overline{Z_P}} \bar{k} + \bar{m} = \overline{k \overset{+}{_n} m} \quad \text{mit} \quad \bar{k} = S^{(k)}(0), S^{(0_n)}(0) = 0$$

$$S^{S_n(k)}(0) = SS^{(k)}(0)$$

durch starke Metamathematische Induktion bewiesen.

Die Hypothese $\bigvee_M \mathrm{Mod}_{\mathrm{norm}}(M, Z_P)$ bzw. $\mathrm{Cst}(Z_P)$ im obigen 1. Unvollständigkeitssatz ist daher zu schwach.

Wie im folgenden gezeigt, impliziert die Zugrundelegung eines Standardmodells für Z_P die ω-Consistenz und damit die Consistenz von Z_P, die durch starke Metamathematische Induktion bewiesenen involvierten Hilfssätze sowie schließlich den 1. Unvollständigkeitssatz in der Version

$$\bigvee_N \mathrm{StandMod}(N, Z_P) \dot{\rightarrow} \not\vdash_{\overline{Z_P}} Ro^{\triangle} \wedge \not\vdash_{\overline{Z_P}} \neg Ro^{\triangle}$$
$$\wedge \not\vdash_{\overline{Z_P}} Gö^{\triangle} \wedge \not\vdash_{\overline{Z_P}} \neg Gö^{\triangle}$$

Gödel hatte – dies scheint auch die Ansicht Fefermans zu sein – keinen Grund zur Unbefriedigtheit darüber, daß für den 2. Teil seines Unvollständigkeitssatzes die ω-Consistenz in Anspruch genommen werden mußte.

Die älteren mathematischen Grundlagenforscher Bolzano, Kronecker, Dedekind, Peano waren sich der Bedeutung der natürlichen Zahlen als Grundlage für alle anderen Entwicklungen der Zahlensysteme bewußt.

(Kronecker: Die natürlichen Zahlen hat Gott vorgegeben, alles andere ist Menschenwerk.)

$$\boxed{\begin{array}{l} \mathrm{Le}_1 \\ \mathrm{StandMod}(n, Z_P) \overset{..}{\to} \\ \quad \overset{..}{\to} \mathrm{Mod}_{\mathrm{norm}}(M, Z_P^+) \dot{\to} \mathrm{StarkInd}(M) \leftrightarrow \mathrm{FinAccess}(M) \end{array}}$$

1.) StandMod $(N, Z_P) \wedge \mathrm{Mod}_{\mathrm{norm}}(M, Z_P^+) \wedge$ Stark Ind$(M) \to$

$$\overset{\alpha)}{\to} 0_M \in |M| \wedge 0_M = S_M^{(0_N)}(0_M) \wedge 0_N \in |N|$$

$$\overset{\mathrm{Part}}{\to} 0_M \in |M| \wedge \bigvee_{k \in |N|} 0_M = S_M^{(k)}(0_M)$$

$$\begin{aligned} \overset{\beta)}{\to} k \in |N| \wedge u = S_M^{(k)}(0_M) \to S_N : |N| \to |N| \\ &\to k \in |N| \to] S_N(k) \in |N| \\ &\to S_N(k) \in |N| \wedge S_M(u) = S_M S_M^{(k)}(0_M) \\ &\qquad\qquad\qquad\qquad = S_M^{(S_N k)}(0_M) \\ &\overset{\mathrm{Part}}{\to} \bigvee_{k \in |N|} S_M(u) \qquad\qquad = S_M^{(k)}(0_M) \end{aligned}$$

$$\to \bigwedge_k .$$

$$\to \bigvee_{k \in |N|} u = S_M^{(k)}(0_M) \to \bigvee_{k \in |N|} S_M(u) = S_M^{(k)}(0_M)$$

$$\to \bigwedge_{u \in |M|} \bigvee_{k \in |N|} u = S_M^{(k)}(0_M) \to \bigvee_{k \in |N|} S_M(u) = S_M^{(k)}(0_M).$$

$$\overset{\alpha,\beta}{\to} \mathrm{StarkInd}(M) \to] \bigwedge_{u \in |M|} \bigvee_{k \in |N|} u = S_M^{(k)}(0_M)$$

$$\mathrm{StandMod}(n, Z_P) \overset{..}{\to} \mathrm{Mod}_{\mathrm{norm}}(M, Z_P^+) \dot{\to} \mathrm{StarkInd}(M)$$

$$\to \bigwedge_{u \in |M|} \bigwedge_{k \in |N|} u = S_M^{(k)}(0_M) \to \mathrm{FinAccess}(M)$$

$$[\{u \in |M| | \bigvee_{k \in |N|} u = S_M^{(k)}(0_M)\} \notin Z_P^+ - \mathrm{FrmBas},$$

$$\bigvee_y x = S^{(y)}(0) \notin Z_P - \mathrm{Frm}]$$

2.) StandMod $(N, Z_P) \dot{\wedge}$ Mod$_{\text{norm}}(M, Z_P^+) \wedge \text{FinAccess}(M) \dot{\rightarrow}$

$$\dot{\rightarrow} \neg \text{StarkInd}(M) \rightarrow \bigvee_{P \notin Z_P \text{Frm Bas}} \cdot 0_M \in P \wedge \bigwedge_{u \in |M|} \cdot u \in P$$

$$\rightarrow S_M(u) \in P \cdot \wedge \bigvee_{u \in |M|} u \notin P$$

$$\xrightarrow{\alpha)} 0_N \in |N| \wedge S_M^{(0_N)}(0_M) = 0_M \in P$$

$$\wedge S_M^{(0_N)}(0_M) \in P$$

$$\xrightarrow{\beta)} \bigwedge_u \cdot u \in |M| \rightarrow u \in P \rightarrow S_M(u) \in P.$$

$$\rightarrow \bigwedge_{k \in |N|} \cdot S_M^{(k)}(0_M) \in |M| \rightarrow] S_M^{(k)}(0_M) \in P$$

$$\rightarrow S_M S_M^{(k)}(0_M) \in P.$$

$$\rightarrow \bigwedge_{k \in |N|} \cdot S_M^{(k)}(0_M) \in P \rightarrow S_M^{(S_N k)}(0_M) \in P.$$

$$\xrightarrow{\alpha,\beta} \text{StarkInd}(N)]$$

$$\bigwedge_{k \in |N|} S_M^{(k)}(0_M) \in P$$

$$\xrightarrow{x} \bigvee_u \cdot u \in |M| \wedge u \notin P \wedge \text{FinAccess}(M).$$

$$\xrightarrow{\text{Hy}_3} \bigvee_u \cdot \bigvee_{k \in |N|} u = S_M^{(k)}(0_M) \wedge u \notin P.$$

$$\rightarrow \bigvee_{k \in |N|} S_M^{(k)}(0_M) \notin P, \neg \bigwedge_{k \in |N|} S_M^{(k)}(0_M) \in P, \alpha, \beta\ ] \perp$$

$$\rightarrow \text{StarkInd}(M)$$

1,2)] StandMod $(N, Z_P) \overset{..}{\rightarrow} \text{Mod}_{\text{norm}}(M, Z_P^+) \dot{\rightarrow} \text{StarkInd}(M) \leftrightarrow$ Fin Access (M)

Le$_2$ StandMod$(N, Z_P) \dot{\rightarrow}$StandMod$(N_1, Z_P^+)(N, Z_P^+) \dot{\rightarrow} h \colon \{\langle u, y \rangle \mid$ $\bigvee_{k \in \|N\|} u = S_{N_1}^{(k)}(0_{N_1}) \wedge y = S_{N_2}^{(k)}(0_{N_2}) \cdot \} \rightarrow N_1 \underset{h}{\overset{\text{iso}}{\sim}} N_2$

$$\text{Prä 1)}\ \text{StandMod}(N, Z_P) \dot{\rightarrow} \text{StandMod}(N_i, Z_P^+) \rightarrow \text{FinAccess}(N_i)$$
$$\rightarrow |N_i| = \{u| \bigvee_{k \in |N|} u = S_{N_i}^{(k)}(0_{N_i})\}$$

$$\text{Prä 2)}\ \text{StandMod}(N, Z_P) \wedge \text{StandMod}(N_i, Z_P^+) \rightarrow \bigwedge_{k,\ l \in |N|} \cdot S_N^{(k)}(0_{N_i})$$
$$= S_N^{(l)}(0_{N_i}) \rightarrow k = l.$$

$$\text{Hy}_{1-4} \xrightarrow{1.)} \underline{\text{Func } h}$$
$$\rightarrow \langle u, y_1\rangle \langle u, y_2\rangle \in h \rightarrow \bigvee_{k \in |N|} \cdot u = S_{N_1}^{(k)}(0_{N_1}) \wedge y_1 = S_{N_2}^{(k)}(0_{N_2}) \cdot \wedge$$
$$\wedge \bigvee_{l \in |N|} \cdot u = S_{N_1}^{(l)}(0_{N_1}) \wedge y_2 = S_{N_2}^{(l)}(0_{N_2}).$$
$$\rightarrow S_{N_1}^{(k)}(0_{N_1}) = u = S_{N_1}^{(l)}(0_{N_1})$$
$$\xrightarrow{\text{Prä 2)}} k = l$$
$$\rightarrow y_1 = S_{N_2}^{(k)}(0_{N_2}) = S_{N_2}^{(l)}(0_{N_2}) = y_2$$
$$\rightarrow y_1 = y_2$$

$$\xrightarrow{2.)} \underline{\text{Un}_1\ (h)}$$
$$\langle u_1, y\rangle \langle u_2, y\rangle \in h \rightarrow \bigvee_{k \in |n|} \cdot u_1 = S_{N_1}^{(k)}(0_{N_1}) \wedge y = S_{N_2}^{(k)}(0_{N_2}) \cdot \wedge$$
$$\wedge \bigvee_{l \in |N|} \cdot u_2 = S_{N_1}^{(l)}(0_{N_1}) \wedge y = S_{N_2}^{(l)}(0_{N_2}).$$
$$\rightarrow S_{N_2}^{(k)}(0_{N_2}) = y = S_{N_2}^{(l)}(0_{N_2})$$
$$\xrightarrow{\text{Prä 2)}} k = l$$
$$\rightarrow u_1 = S_{N_1}^{(k)}(0_{N_1}) = S_{N_1}^{(l)}(0_{N_1}) = u_2$$
$$\rightarrow u_1 = u_2$$

$$\mathrm{Hy}_{1-4} \xrightarrow{3.)} \underline{\mathrm{db}(h) = |N_1|}$$

$$u \in \mathrm{db}(h) \leftrightarrow \bigvee_{y} \langle u, y\rangle \in h$$

$$\leftrightarrow \bigvee_{y} \bigvee_{k \in |N|} \cdot u = S^{(k)}_{N_1}(0_{N_1}) \wedge y = S^{(k)}_{N_2}(0_{N_2}).$$

$$\leftrightarrow \bigvee_{k \in |N|} u = S^{(k)}_{N_1}(0_{N_1})[\wedge \bigvee_{y} y = S^{(k)}_{N_2}(0_{N_2})]$$

$$\overset{\text{Prä 1}}{\leftrightarrow} u \in |N_1|$$

$$\mathrm{db}(h) = |N_1|$$

$$\xrightarrow{4.)} \underline{wb\ h = |N_2|}\ \text{Prä1]}\ \text{StandMod}\ (N, Z_P)(N_2, Z^{+}_{P}) \dot{\rightarrow}$$

$$\dot{\rightarrow} \bigwedge_{y} \cdot y \in |N_2| \leftrightarrow \bigvee_{k \in |N|} y = S^{(k)}_{N_2}(0_{N_2}).$$

$$y \in wb\ h \leftrightarrow \bigvee_{u} \langle u, y\rangle \in\ h$$

$$\overset{\text{Def } h}{\leftrightarrow} \bigvee_{u} \bigvee_{k \in |N|} \cdot u = S^{(k)}_{N_1}(0_{N_1}) \wedge y = S^{(k)}_{N_2}(0_{N_2}).$$

$$\leftrightarrow \bigvee_{k \in |N|} \left[\bigvee_{u} u = S^{(k)}_{N_1}(0_{N_1}) \wedge\right] y = S^{(k)}_{N_2}(0_{N_2})$$

$$\overset{\text{Prä 1)}}{\leftrightarrow} y \in |N_2|$$

$$wb\ h = |N_2|$$

$$\xrightarrow{1-4} \quad |N_1| \underset{h}{\overset{\text{bij}}{\sim}} |N_2|$$

$$\xrightarrow{5.)} \underline{h(0_{N_1}) = 0_{N_2}}$$

$$h(0_{N_1}) = 0_{N_2} \leftrightarrow 0_{N_1} \in |N_1| = dbh \wedge h(0_{N_1}) = 0_{N_2}$$

$$\leftrightarrow \langle 0_{N_1}, 0_{N_2}\rangle \in h$$

$$\left[\overset{\text{Def } h}{\leftrightarrow} \bigvee_{\substack{k \in |N| \\ \| \\ 0_N}} \cdot 0_{N_1} = S^{(k)}_{N_1}(0_{N_1}) \wedge 0_{N_2} = S^{(k)}_{N_2}(0_{N_2}). \right]$$

$$\mathrm{Hy}_{1-4} \xrightarrow{6.)} \underline{\bigwedge_{u\in|N_1|} hS_{N_1}(u) = S_{N_2}(hu)}$$

$$\alpha)\ \text{Prä}\ k \in |n| \to \langle S_{N_1}^{(k)}(0_{N_1}), S_{N_2}^{(k)}(0_{N_2})\rangle \in h$$

$$\left[\leftrightarrow \bigvee_{\substack{l\in|N| \\ \| \\ k}} \cdot S_{N_1}^{(k)}(0_{N_1}) = S_{N_1}^{(l)}(0_{N_1}) \wedge S_{N_2}^{(k)}(0_{N_2}) = S_{N_2}^{(l)}(0_{N_2}).\right]$$

$$\bigwedge_{k\in|N|} hs_{N_1}^{(k)}(0_{N_1}) = S_{N_2}^{(k)}(0_{N_2}) = S_{N_2}^{(k)}(h\ 0_{N_1})$$

$$\beta) \bigwedge_{\substack{u \\ k\in|N|}} \cdot u \in |N_1| \wedge u = S_{N_1}^{(k)}(0_{N_1}) \to hS_{N_1}(u) = hS_{N_1}(S_{N_1}^{(k)}(0_{N_1}))$$

$$= hS_{N_1}^{(k+_N 1)}(0_{N_1})$$

$$\overset{\alpha)}{=} S_{N_2}^{(k+_N 1)}(0_{N_2})$$

$$= S_{N_2}S_{N_2}^{(k)}(0_{N_2})$$

$$\overset{\alpha)}{=} S_{N_2}hS_{N_1}^{(k)}(0_{N_1})$$

$$\bigwedge_u \cdot u \in |N_1| \wedge \bigvee_{k\in|N|} u = S_{N_1}^{(k)}(0_{N_1}) \to hS_{N_1}(u) = S_{N_2}(hu).$$

$$\bigwedge_u \cdot u \in |N_1|[\wedge\ \text{FinAccess}\,(N_1)] \to hS_{N_1}(u) = S_{N_2}(h_u).$$

$$\text{StandMod}(N_1, Z_P^+)$$

$$\mathrm{Hy}_{1-4} \xrightarrow{7.)} \underline{\bigwedge_{u,y\in|n_1|} h(u + N_1 y) = hu + N_2 hy}\ \text{Starke MMInd}^l y, N_1 \in$$

Stark Induktiv

$$\xrightarrow{1.)} \vdash_{Z_P^+} x + 0 = x \qquad x + Sy = S(x+y)\ \text{StandMod}\ (N_1, Z_P^+)$$

$$\text{StandMod}\ (N_2, Z_P^+)$$

$$\bigwedge_{u\in|N_1|} u +_{N_1} 0_{N_1} = u \qquad \bigwedge_{\substack{u\in|N_1|\\ y\in|N_2|}} u +_{N_1} S_{N_1}y = S_{N_1}(u +_{N_1} y)^{*}$$

$$\bigwedge_{u\in|N_2|} u +_{N_2} 0_{N_2} = u \qquad u +_{N_2} S_{N_2}y = S_{N_2}(u +_{N_2} y)^{**}$$

$$\bigwedge_{u\in|N_1|} u +_{N_1} 0_{N_1} = u \qquad P := \{y \in |N_1| \,|\, \bigwedge_{u\in|N_1|} h(u +_{N_1} y) = hu +_{N_2} hy\}$$

$$\begin{aligned} h(u +_{N_1} 0_{N_1}) &= hu \\ &= hu +_{N_2} 0_{N_2} \end{aligned}$$

$$\bigwedge_{u\in|N_1|} (u +_{N_1} 0_{N_1}) = hu +_{N_2} h0_{N_1} \wedge 0_{N_1} \in |N_1|$$

$$0_{N_1} \in P$$

$$\overset{2.)}{\rightarrow} \bigwedge_{y\in|N_1|} \cdot \bigwedge_{u\in|N_1|} h(u + N_1 y) = hu +_{N_2} hy \rightarrow \bigwedge_{u\in|N_1|} h(u +_{N_1} S_{N_1}y)$$

$$\begin{aligned} &\overset{*}{=} hS_{N_1}(u +_{N_1} y) \\ &\overset{6.)}{=} S_{N_2}h(u +_{N_1} y) \\ &\overset{\mathrm{IA}}{=} S_{N_2}(hu +_{N_2} hy) \\ &\overset{**}{=} hu +_{N_2} S_{N_2}hy \\ &\overset{6.)}{=} hu +_{N_2} hS_{N_1}y. \end{aligned}$$

$$\bigwedge_{y\in|N_1|} \cdot \bigwedge_{u\in|N_1|} h(u +_{N_1} y) = hu +_{N_2} hy \rightarrow \bigwedge_{u\in|N_1|} h(u +_{N_1} S_{N_1}y)$$

$$= hu +_{N_2} hS_{N_1}y.$$

$$\bigwedge_{y\in|N_1|} \cdot y \in P \rightarrow S_{N_1}y \in P.$$

$$\overset{1.,2.)}{\rightarrow} \text{Stark Indukt}(N_1) \rightarrow]\bigwedge_{y\in|N_1|} y \in P$$

$$\rightarrow \bigwedge_{y,u\in|N_1|} h(u +_{N_1} y) = hu +_{N_2} hy$$

$$\mathrm{Hy}_{1-4} \xrightarrow{8.)} \underline{\bigwedge_{u,y\in|N_1|} h(u \cdot_{N_1} y) = hu \cdot_{N_2} hy} \qquad \text{Starke MMInd}^l y$$

$$\vdash_{Z_P^+} x \cdot 0 = 0 \qquad \text{StandMod } (N_1, Z_P^+)(N_2, Z_P^+)$$

$$\bigwedge_{u\in|N_1|} u \cdot_{N_1} 0_{N_1} = 0_{N_1}$$

$$u \cdot_{N_2} 0_{N_2} = 0_{N_1}$$

$$\vdash_{Z_P^+} x \cdot Sy = x \cdot y + x$$

$$\bigwedge_{u,y\in|N_1|} u \cdot_{N_1} S_{N_1} y = u_{N_1} y +_{N_1} u$$

$$u \cdot_{N_2} S_{N_2} y = u \cdot_{N_2} y +_{N_2} u$$

$$\xrightarrow{\alpha)} \bigwedge_{u\in|N_1|} u \cdot_{N_1} 0_{N_1} = 0_{N_1}$$

$$h(u \cdot_{N_1} 0_{N_1}) = h0_{N_1} \stackrel{5.)}{=} 0_{N_2} = hu \cdot_{N_2} 0_{N_2} = hu \cdot_{N_2} h\, 0_{N_1}$$

$$h(u \cdot_{N_1} 0_{N_1}) = hu \cdot_{N_2} h0_{N_1}$$

$$\xrightarrow{\beta)} \bigwedge_{u,y\in|N_1|} h(u \cdot_{N_1} y) = hu \cdot_{N_2} hy \to u \cdot_{N_1} S_{N_1} y = (u \cdot_{N_1} y) +_{N_1} u$$

$$\to h(u \cdot_{N_1} S_{N_1} y) = h(u \cdot_{N_1} y +_{N_1} u)$$

$$\stackrel{7.)}{=} h(u \cdot_{N_1} y) +_{N_2} hu$$

$$\stackrel{\mathrm{IA}}{=} (hu \cdot_{N_2} hy) +_{N_2} hu$$

$$= hu \cdot_{N_2} S_{N_2} h(y)$$

$$= hu \cdot_{N_2} hS_{N_1}(y)$$

$$\bigwedge_{u\in|N_1|} \bigwedge_{y\in|N_1|} h(u \cdot_{N_1} y) = hu \cdot_{N_2} hy \to h(u \cdot_{N_1} S_{N_1} y) = hu \cdot_{N_2} hS_{N_1} y$$

$$\alpha\beta] \bigwedge_{u,y\in|N_1|} h(u \cdot_{N_1} y) = hu \cdot_{N_2} hy$$

$$\mathrm{Hy}_{1-4} \xrightarrow{1-8} N_1 \overset{\text{iso}}{\sim} N_2$$

$$\bigvee_N \text{StandMod } (N, Z_P) \to \bigwedge_{N_1,N_2} \cdot\text{StandMod } (N_1, Z_P^+)(N_2, Z_P^+)$$
$$\to N_1 \overset{\text{iso}}{\sim} N_2.$$

$$\bigvee_N \text{StandMod}(N, Z_P^+) \to$$

$$\bigvee_N \text{StandMod}(N, Z_P^+) \to \bigvee_N \text{StandMod}(N, Z_P^+) \wedge \bigwedge_{N_1,N_2} \cdots \cdot$$
$$\to \overset{1}{\bigvee_N} \text{StandMod}(N, Z_P^+) \text{ bis auf Iso}$$

$$\boxed{\mathrm{Le}_3 \text{ StandMod } (N, Z_P) \dot{\to} \bigvee_M \text{StandMod } (M, Z_P^+) \to \omega \text{ Cst}(Z_P^+)}$$

$$\text{StandMod } (N, Z_P) \wedge \text{StandMod}(M, Z_P^+) \wedge \neg\, \omega\, \text{Cst}(Z_P^+) \to$$

$$\xrightarrow{\alpha)} \underline{\bigwedge_{k \in |N|} (S^{(k)}(0))_{\langle M, v\rangle} = S_M^{(k)}(0_M)} \qquad \text{Starke MM Ind}^l k$$

a) $0_N \in |N| \wedge (S^{(0_N)}(0))_{\langle M, v\rangle} = 0_{\langle M, v\rangle} = 0_M = S_M^{(0_N)}(0_M)$

b) $\bigwedge_{k \in |N|} (S^{(k)}(0))_{\langle M, v\rangle} = S_M^{(k)}(0_M) \to$

$$\begin{aligned} \to ((S^{(S_N k)}(0))_{\langle M, v\rangle} &= (SS^{(k)}(0))_{\langle M, v\rangle} \\ &= S_M(S^{(k)}(0))_{\langle M, v\rangle} \\ &= S_M S_M^{(k)}(0_M) \end{aligned}$$
$$\to ((S^{(S_N k)}(0))_{\langle M, v\rangle} = S_M^{(S_N k)}(0_M)$$

a, b] $\bigwedge_{k \in |N|} (S^{(k)}(0))_{\langle M, v\rangle} = S_M^{(k)}(0_M)$

$$\text{StandMod}\,(N, Z_P) \wedge \text{StandMod}\,(M, Z_P^+) \wedge \neg\,\omega\,\text{Cst}(Z_P^+) \to$$

$$\stackrel{\beta)}{\to} \bigvee_{A\in\text{Frm}_{Z_P^+}} \bigwedge_{k\in|N|} \vdash_{\overline{Z_P^+}} A\,\frac{x}{k} \wedge \vdash_{\overline{Z_P^+}} \neg \bigwedge_x A$$

$$\vdash_{\overline{Z_P^+}} A^{\,x}_{S^{(k)}(0)} \wedge \vdash_{\overline{Z_P^+}} \neg \bigwedge_x A \wedge \text{Mod}_{\text{norm}}(M, Z_P^+)$$

$$\bigwedge_{k\in|N|} (A^{\,x}_{S^{(k)}(0)})_{\langle M, v\rangle} = 1 \wedge (\neg \bigwedge_x A)_{\langle M,v\rangle} = 1$$

$$\bigwedge_{k\in|N|} A_{\langle M, v^x/S^{(k)}(0))_{\langle M,v\rangle}\rangle} = 1 \wedge \dot{\neg} (\bigwedge_{r\in|M|} A_{\langle M,v^x/u\rangle} = 1)$$

$$\alpha) \to] \bigwedge_{k\in|N|} A_{\langle M,v^x/S_M^{(k)}(0_M)\rangle} = 1$$

$$\bigvee_{A\in\text{Frm}_{Z_P^+}} \bigwedge_u \cdot u \in |M| \stackrel{\text{Le1}}{\to} \bigvee_{k\in|N|} u = S_M^{(k)}(0_M) \wedge A_{\langle M,v^x/S_M^{(k)}(0_M)\rangle}$$

$$= 1 \cdot \wedge \dot{\neg} (\ )$$

$$\to \bigwedge_{u\in|M|} A_{\langle M,v^x/u\rangle} = 1 \wedge \dot{\neg} (\bigwedge_{u\in|M|} A_{\langle M,v^x/u\rangle} = 1), \perp$$

StandMod $(N, Z_P^+)\wedge$ StandMod $(M, Z_P^+) \to \omega$ Cst (Z_P^+)
StandMod $(N, Z_P^+) \dot{\to} \bigvee_M$ StandMod $(M, Z_P^+) \to \omega$ Cst (Z_P^+)
Tollendo tollens erhält man das Corrollar 3β:

$$\text{StandMod}(N, Z_P^+) \dot{\to} \omega\ \text{Incst}(Z_P^+) \to \neg \bigvee_M \text{StandMod}(M, Z_P^+)$$

$$\to \neg \bigvee_M \cdot\text{Mod}_{\text{norm}}(M, Z_P^+) \wedge$$

$$\wedge\ \text{Stark Ind}(M).$$

Klarerweise gilt: StandMod $(N, Z_P^+) \dot{\to} \omega$ Cst$(Z_P^+) \to$ Cst(Z_P^+)

$$\text{StandMod}\ (N, Z_P^+) \dot{\to} \omega\ \text{Cst}\ (Z_P^+)$$

$$\to \left[\bigwedge_{k\in|n|} \vdash_{\overline{Z_P^+}} \bar{k} = \bar{k} \to \right] \not\vdash_{\overline{Z_P^+}} \neg \bigwedge_x x = x$$

$$\dot{\to} \omega\ \text{Cst}\ (Z_P^+) \to \text{Cst}\ (Z_P^+)$$

$\bigwedge_{k\in|N|} \vdash_{\overline{Z_P^+}} \bar{k} = \bar{k}$ wird durch starke metamathematische Induktion nach k bewiesen. ($\{k \in |N|| \vdash_{\overline{Z_P^+}} S^{(k)}(0) = S^{(k)}(0)\}$ ist nicht Z_P^+-Formel basiert.)

Z_P für Z_P^+ ergibt:

$$\bigvee_N \text{StandMod } (N, Z_P) \xrightarrow[\text{Le}_3]{\cdot} [\omega \,\text{Cst } Z_P \rightarrow] \text{ Cst } Z_P$$

Dieses Resultat steht im Einklang mit dem aus dem 2. Unvollständigkeitssatz folgenden Ergebnis, daß die Consistenz von Z_P nur mit höheren Mitteln als in Z_P selbst formal verfügbar bewiesen werden kann.

$$\boxed{\text{Le}_4 \text{ StandMod } (N, Z_P) \vdash_{\overline{ML}} \omega \text{ Cst } Z_P^+ \rightarrow \bigvee_M \text{StandMod } (M, Z_P^+)}$$

StandMod $(N, Z_P) \vdash_{\overline{ML}}$

$$\vdash_{\overline{ML}} \omega \text{ Cst } Z_P^+ \wedge \bigwedge_m \cdot \text{Mod}_{\text{norm}}(M, Z_P^+) \rightarrow \neg \text{Stark Ind}(M). \rightarrow$$

$$\overset{M \| N}{\rightarrow} \text{Mod}_{\text{norm}}(N, Z_P^+) \rightarrow \neg \text{Stark Ind}(N) \overset{\text{Hy}}{\wedge} \text{Stark Ind}(N), \perp$$

$$\rightarrow \neg \text{Mod}_{\text{norm}}(N, Z_P^+)$$

$$\text{Prä} \vdash_{\overline{ML}} \omega \text{ Cst } Z_P^+ \overset{\text{tolltoll}}{\rightarrow} \text{Mod}_{\text{norm}}(N, Z_P^+)$$

$$\rightarrow \bigvee_M \cdot \text{Mod}_{\text{norm}}(M, Z_P^+) \wedge \text{StarkInd}(M).$$

$$\bigwedge_N \cdot$$

$$\text{Prä} \vdash_{\overline{ML}} \omega \text{ Cst } Z_P^+ \rightarrow \left[\bigvee_N \text{Mod }_{\text{norm}}(N, Z_P^+) \rightarrow \right] \bigvee_M \text{Stand Mod}(M, Z_P^+)$$

$$\text{Cst } Z_P^+$$

$$\text{Stand Mod } (N, Z_P) \vdash^{B}_{\overline{ML}} \omega \text{ Cst } Z_P^+ \rightarrow \bigvee\nolimits_M \text{StandMod}(M, Z_P^+)$$

$$\text{StandMod } (N, Z_P) \vdash_{\overline{ML}} \omega \text{ Cst } Z_P^+ \rightarrow \bigvee\nolimits_M \text{StandMod}(M, Z_P^+)$$

Da $\text{GenVar}_B \cap \text{Fr Var}_{\text{StandMod }(N, Z_P)} \neq \phi$, ist implikative Überstellung von StandMod (N, Z_P) gemäß Metadeduktionstheorem nicht möglich.

Abschließend mögen 3 Erweiterungen von Z_P hinsichtlich ihres Modellcharakters untersucht werden:

$$Z_P[c; \{c \neq \bar{k} | k \in |N|\}], Z_P[\neg G^{\triangle}], L[L_{Z_P}; \{A \in Z_P | \text{Val}(A, N)\}]$$

StandMod $(N, Z_P) \rightarrow$

$$\xrightarrow{1.)} Z_P^{+c} := Z_P[c; \{c \neq \bar{k} | k \in |N|\}]$$

Z_P^{+c} ist also jene Erweiterung, die aus Z_P durch Hinzunahme einer neuen Konstante c und der Eigenaxiomenmenge $\{c \neq \bar{k} | k \in |N|\}$ hervorgeht;

$\alpha)$ wegen $\bigwedge_{k \in |N|} \vdash_{\overline{Z_P^{+c}}} c \neq \bar{k}$ und $\vdash_{\overline{Z_P^{+c}}} c = c, \bigvee_x c = x, \neg \bigwedge_x c \neq x$ gilt: ω Incst (Z_P^{+c}), wegen Le$_3\beta : \bigwedge_M \cdot$ Mod$_{\text{norm}}(M, Z_P^{+c}) \rightarrow \neg$ StandMod (M, Z_P^{+c}).

$$\bigwedge_M \cdot \text{Mod}_{\text{norm}}(M, Z_P^{+c}) \rightarrow \text{Mod}_{\text{norm}} \backslash \text{StandMod}(M, Z_P^{+c}).$$

$$\rightarrow \text{Non StandMod } (M, Z_P^{+c}).$$

$\beta)$ Wir zeigen: $\bigvee_M \text{Mod}_{\text{norm}}(M, Z_P^{+c})$

$$\begin{aligned}
\neg \text{ Cst } Z_P^{+c} \rightarrow & \bigvee_{k_{i_1},\ldots,k_{i_n} \in |N|} c \neq \overline{k_{i_1}} \wedge \ldots \wedge c \neq \overline{k_{i_n}} \vdash_{\overline{Z_P[c]}} \bot \\
& \rightarrow \vdash_{\overline{Z_P[c]}} c = \overline{k_{i_1}} \vee \ldots \vee c = \overline{k_{i_n}} \\
& \rightarrow \vdash_{\overline{Z_P}} x = \overline{k_{i_1}} \vee \ldots \vee x = \overline{k_{i_n}} \\
& \rightarrow \vdash_{\overline{Z_P}} \overline{S \max(k_{i_1}, \ldots, k_{i_n})} \\
& \qquad = \overline{k_{i_1}} \vee \ldots \vee \overline{S \max(k_{i_1}, \ldots, k_{i_n})} = \overline{k_{i_n}} \\
& \rightarrow \vdash_{\overline{Z_P}} \bot \vee \ldots \vee \bot \\
& \rightarrow \neg \text{ Cst } Z_P \wedge \text{Hy}] \text{ Cst } Z_P, \bot \\
\text{Cst } Z_P^{+c}, & \bigvee_M \text{Mod}_{\text{norm}}(M, Z_P^{+c})
\end{aligned}$$

$\alpha, \beta] \bigvee_M$ NonStandMod $(M, Z_P^{+c}) \wedge \bigwedge_M \cdot \text{Mod}_{\text{norm}}(M, Z_P^c) \rightarrow$ NonStandMod (M, Z_P^{+c}).

$$\begin{aligned}
\xrightarrow{\gamma)} \text{NonStandMod}(M, Z_P^{+c}) & \rightarrow M^* := \langle |M|, \underline{\bar{M}}\{\langle c, c\rangle\}\rangle \\
& \rightarrow \text{Mod}_{\text{norm}}(M^*, Z_P) \\
& \text{mit } 0_{M^*} = 0_M, S_{M^*} = S_M, |M^*| = |M| \\
& \text{so daß } c_M \in |M^*|, c_{M^*} \text{nicht definiert}
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&\mathrm{StandMod}\ (N, Z_P) \rightarrow \\
&\ \rightarrow \mathrm{NonStandMod}(M, Z_P^{+c}) \rightarrow \\
&\qquad \rightarrow \mathrm{StarkInd}(M^*) \xrightarrow{\mathrm{Le}_1} \bigwedge_{u \in |M^*|} \bigvee_{k \in |N|} u = S_{M^*}^{(k)}(0_{M^*}) \\
&\qquad\qquad \xrightarrow{\mathrm{Spez}} c_M \in |M^*| = |M| \rightarrow] \bigvee_{k \in |N|} c_M = S_{M^*}^{(k)}(0_{M^*}) \\
&\qquad\qquad \rightarrow \neg \bigwedge_{k \in |N|} c_M \neq S_M^{(k)}(0_M) \wedge \bigwedge_{k \in |N|} \vdash_{\overline{Z_P^{+c}}} c \neq \bar{k} \\
&\qquad\qquad\qquad \wedge \bigwedge_{k \in |N|} \vdash_{\overline{Z_P^{+c}}} c \neq S^{(k)}(0) \\
&\qquad\qquad\qquad \wedge \mathrm{Mod}_{\mathrm{norm}}(M, Z_P^{+c}) \\
&\qquad\qquad\qquad \wedge \bigwedge_{k \in |N|} c_M \neq S_M^{(k)}(0_M) \\
&\qquad\qquad \rightarrow \perp \\
&\qquad \rightarrow \neg\ \mathrm{StarkInd}\ (M^*) \\
&\qquad \rightarrow \neg\ \mathrm{StandMod}\ (M^*, Z_P) \wedge \mathrm{Mod}_{\mathrm{norm}}(M^*, Z_P) \\
&\qquad \rightarrow \mathrm{NonStandMod}(M^*, Z_P)
\end{aligned}
$$

$\mathrm{StandMod}(N, Z_P) \rightarrow [\bigvee_M \mathrm{NonStandMod}(M, Z_P^{+c}) \rightarrow] \bigvee_{M^*}$ Non-Stand $\mathrm{Mod}(M^*, Z_P), \bigvee_N \mathrm{StandMod}(N, Z_P) \rightarrow \bigvee_N \mathrm{NonStandMod}\ (N, Z_P)$

$$
\begin{aligned}
&\mathrm{NonStandMod}(N, Z_P) \rightarrow \\
&\xrightarrow{\delta)} \mathrm{NonStandMod}\ (M, Z_P^{+c}) \rightarrow \\
&\rightarrow \vdash_{\overline{Z_P^{+c}}} c \neq 0, x = 0 \vee \bigvee_y x = Sy, c_\perp = 0 \vee] \\
&\qquad \bigvee_y c = Sy \wedge \mathrm{Mod}_{\mathrm{norm}}(M, Z_P^{+c}) \\
&\rightarrow c_M \neq 0_M \wedge \bigvee_{y \in |M|} c_M = S_M(y) \\
&\rightarrow \bigwedge_{l, k \in |N|} \breve{S}_M^{(l)}(c_M) = S_M^{(k)}(0_M) \rightarrow S_M^{(l)} \breve{S}_M^{(l)}(c_M) = S_M^{(l)} S_M^{(k)}(0_M) \\
&\qquad\qquad \rightarrow c_M = S_M^{(l +_N k)}(0_M), \perp \\
&\rightarrow \bigwedge_{l \in |N|} \neg \bigvee_{k \in |N|} \breve{S}_M^{(l)}(c_M) = S_M^{(k)}(0_M)
\end{aligned}
$$

StandMod $(N, Z_P) \rightarrow$

$$\rightarrow \text{NonStandMod}(M, Z_P^{+c}) \rightarrow$$
$$\rightarrow |M| = \{0_M, \ldots, S_M^{(k)}(0_M), \ldots | \ldots \breve{S}_M^{(k)}(c_M), \ldots c_M,$$
$$S_M(c_M) \ldots S_M^{(k)}(c_M) \ldots\}$$

d.h.$|M|$ ist Vereinigung zweier schnittfreien Mengen, deren eine den natürlichen Zahlen und deren andere den ganzen Zahlen entspricht.

2.) Sind Dg, Dem die arithmetischen Entsprechungen für die Diagonalfunktion $(\text{Dg}(\ulcorner A \urcorner) = \ulcorner A \frac{x_1}{\ulcorner A \urcorner} \urcorner)$ und Demonstrierbarkeit und definiert man die Diagonalendemonstrierbarkeit $\text{Dem}^{\triangle}$ durch:

$$\text{Dem}^{\triangle}(k_1, k_2) \leftrightarrow \bigvee_{k_3} \cdot \text{Dg}(k_1, k_3) \wedge \text{Dem}\,(k_3, k_2).$$
$$\leftrightarrow \text{Dem}\,(\text{Dg}\,\pi_1^2(k_1, k_2), \pi_2^2(k_1, k_2))$$

so ist wegen der (primitiven) Rekursivität von Dem, Dg, π_k^N die Relation $\text{Dem}^{\triangle}$ rekursiv. Sei $\overline{\text{Dem}}^{\triangle}(x_1, x_2)$ die gemäß dem Repräsentationstheorem bestehende negationstreu repräsentierende Satzformel in Z_P für $\text{Dem}^{\triangle}$, so möge $Gx_1 :\leftrightarrow \neg \bigvee_{x_2} \overline{\text{Dem}}^{\triangle}(x_1, x_2)$ als Gödelformel bezeichnet werden. Für ihre Diagonalisierte $G \frac{x_1}{\ulcorner Gx_1 \urcorner}$, die mit $G^{\triangle}$ bezeichnet werden möge, hat Gödel unter Voraussetzung der Consistenz bzw. ω-Consistenz ihre Unbeweisbarkeit bzw. Unwiderlegbarkeit bewiesen.

Mit den vorstehend entwickelten Mitteln zeigen wir unter Voraussetzung StandMod (n, Z_P), daß die Erweiterungstheorie $Z_P[\neg G^{\triangle}]$ ω-inconsistent ist, sie ein Nonstandardmodell, aber kein Standardmodell besitzt, auch jedes ihrer Normalmodelle ein Nonstandardmodell ist.

$$\text{StandMod}\,(N, Z_P) \rightarrow \not\vdash_{\overline{Z_P}} G^{\triangle}, \text{Cst } Z_P[\neg G^{\triangle}],$$

$$G^{\triangle} :\leftrightarrow \neg \bigvee_{x_2} \overline{\text{Dem}^{\triangle}}\,(\overline{\ulcorner Gx_1 \urcorner}, x_2)$$

$$\rightarrow \neg \bigvee_{k \in |N|} \text{Dem}^{\triangle}(\ulcorner Gx_1 \urcorner, k)$$

$$\rightarrow \bigwedge_{k \in |N|} \neg \text{Dem}^{\triangle}(\ulcorner Gx_1 \urcorner, k)$$

$$\rightarrow \bigwedge_{k \in |N|} \vdash_{\overline{Z_P}} \neg \overline{\text{Dem}^{\triangle}}\,(\overline{\ulcorner Gx_1 \urcorner}, k)$$

$$\rightarrow \bigwedge_{k \in |N|} \vdash_{\overline{Z_P[\neg G^{\triangle}]}} \neg\, \overline{\text{Dem}^{\triangle}}\,(\overline{\ulcorner Gx_1 \urcorner}, k)$$

$$\wedge \vdash_{\overline{Z_P[\neg G^{\triangle}]}} \bigvee_{x_2} \overline{\text{Dem}^{\triangle}}\,(\overline{\ulcorner Gx_1 \urcorner}, x_2)$$

$$\neg \bigwedge_{x_2} \neg (\overline{\text{Dem}^{\triangle}}(\overline{\ulcorner Gx_1 \urcorner}, x_2))$$

$$\rightarrow \omega \text{ Incst}\,(Z_P[\neg G^{\triangle}])$$

$$\rightarrow \text{Cst } Z_P[\neg G^{\triangle}] \wedge \neg\, \omega \text{ Cst } Z_P[\neg G^{\triangle}]$$

$$\rightarrow \bigvee_{m} \text{Mod}_{\text{norm}}(M, Z_P[\neg G^{\triangle}])$$

$$\wedge \bigwedge_{M} \cdot \text{Mod}_{\text{norm}}(M, Z_P[\neg G^{\triangle}]) \rightarrow \neg \text{StarkIndukt}(M).$$

$$\rightarrow \bigvee_{M} \cdot \text{Mod}_{\text{norm}}(M, Z_P)[\neg G^{\triangle}]) \wedge \neg \text{StarkIndukt}(M).$$

$$\wedge \neg \text{StandMod}(M, Z_P[\neg G^{\triangle}]).$$

$$\rightarrow \bigvee_{M} \text{NonStandMod}(M, Z_P[\neg G^{\triangle}])$$

$$\wedge \bigwedge_{M} \cdot \text{Mod}_{\text{norm}}(M, Z_P[\neg G^{\triangle}])$$

$$\rightarrow \text{NonStandMod}(M, Z_P[\neg G^{\triangle}]).$$

3.)

$$\text{StandMod}\,(n, Z_P) \rightarrow T_n := L[\mathcal{L}_{Z_P}; \{A \in \text{Frm}_{Z_P} | \text{Val}(A, N)\}]$$

Man zeigt durch Vollst Ind nach der Deduktionszahl:

$$\bigwedge_{A \in \text{Frm}_{Z_P}} \vdash_{\overline{T_N}} A \leftrightarrow \text{Val}\,(A, N),$$

damit: $\underset{Z_P}{\models} A \to \mathrm{Val}(A, N), \underset{T_N}{\models} A$
$\mathrm{Erw}(T_N, Z_P)$

StandMod $(N, Z_P) \to$

$$\overset{\alpha)}{\to} \bigwedge_{k \in |N|} \underset{T_N}{\models} A\frac{x}{k} \to \bigwedge_{k \in |N|} \mathrm{Val}(A\frac{x}{k}, N)$$

$$\to \bigwedge_{k \in |N|} \bigwedge_{v:\mathrm{Var} \to |N|} A^{\frac{x}{\bar{k}}}_{\langle N,v \rangle} = 1$$

$$\to \quad A_{\langle N, v^x/\bar{k}_{\langle N,v \rangle}} = 1 \wedge \bar{k}_{\langle N,v \rangle} = k$$

$$\to \bigwedge_{v:\mathrm{Var} \to |N|} \cdot \bigwedge_{k \in |N|} A_{\langle N, v^x/k \rangle} = 1$$

$$\to \bigwedge_{v:\mathrm{Var} \to |N|} \bigwedge_{x} A_{\langle N,v \rangle} = 1$$

$$\to \mathrm{Val}(\bigwedge_x A, N)$$

$$\to \neg\mathrm{Val}(\neg \bigwedge_x A, N)$$

$$\to \bigwedge_{A \in \mathrm{Frm}_{T_N}} \cdot \bigwedge_{k \in |N|} \underset{T_N}{\models} A\frac{x}{k} \to \cdot\neg \underset{T_N}{\models} \neg \bigwedge_x A.$$

$$\to \omega\mathrm{Cst}(T_N)$$

$\overset{\beta)}{\to} \mathcal{L}_{T_N} = \mathcal{L}_{Z_P} \to]$ IntprStr$(N, T_N) \wedge \bigwedge_{A \in EAx_{T_N}}$ Val (A, N),
Mod$_{\mathrm{norm}}(N, t_N) \to$ Hy] Stark Induktiv (N)
$\to$ StandMod (N, t_N)
$\to$ Sind $Z_P[c; \{c \neq \bar{k} | k \in |N|\}]$ und $Z_P[\neg G^\triangle]$ Beispiele für ω-inconsistente Theorien, so ist $L[\mathcal{L}_{Z_P}; \{A \in \mathrm{Frm}_{Z_P} | \mathrm{Val}(A, N)\}]$ Beispiel einer ω-consistenten Theorie; da jede Subtheorie einer ω-consistenten Theorie ω-consistent ist, so ist RR als Subtheorie von Z_P ω-consistent.

Definitionszusammenstellung einiger verwendeter Konzepte

Es mögen abkürzen:
Intpr – Interpretation, Func – Funktion, db – Definitionsbereich, Var – Variable, Expr – Expressor, Const – Konstante, Fuor^N – n-stelliger Funktor, Pror^N – n-stelliger Prädikator, c_I–$I^I c$, f_I–$I^I f$, P_I–$I^I P$, IntprStr – Interpretationsstruktur, Mod – Modell, Mod$_{\mathrm{norm}}$ – Normalmodell, Mod$^{=\aleph_\alpha}_{\mathrm{norm}}$ – Normalmodell der Mächtigkeit $\aleph_\alpha$, InitOrd – Initi-

alordinalzahl (Ordinalzahl, die mit keiner kleineren Ordinalzahl gleichmächtig ist, Kardinalzahl im heutigen Sinn).
Dann:
Intpr $(I, T, M) :\leftrightarrow M \neq \phi \wedge \mathrm{Func}\,(I) \wedge \mathrm{db}(I) = \mathrm{Const}_T \cup \mathrm{Fuor}_T \cup \mathrm{Pror}_T$

$$\wedge \bigwedge_{c \in \mathrm{Const}_T} c_I \in M \wedge \bigwedge_{f \in \mathrm{Fuor}_T^N} f_I : M^N \to M \wedge \bigwedge_{P \in \mathrm{Prop}_T^N} P_I \subseteq M^N$$

IntprStr $(M, T) :\leftrightarrow \bigvee_{M,I} \cdot \mathcal{M} = \langle M, I \rangle \wedge \mathrm{Intpr}(I, T, M)$.
Die Charakteristik χ_R einer n-stelligen Relation R sei definiert durch:

$$\chi_R := \{\langle m_1, \ldots, m_n, y \rangle | \mathrm{R}(m_1, \ldots, m_n) \wedge \\ y = 1_{b^2} \dot{\vee} \neg \mathrm{R}(m_1, \ldots, m_n) \wedge y = 0_{b^2}\}$$

Die Fortsetzung der Interpretation von Expressoren ist gegeben durch:
IntprStr $(M, T) \wedge \mathcal{M} = \langle M, I \rangle \wedge v : \mathrm{Var} \to M$ so:

$$x_{\langle \mathcal{M}, v \rangle} = v^l x$$

$$c_{\langle \mathcal{M}, v \rangle} = c_I$$

$$f(a_1, \ldots, a_n)_{\langle \mathcal{M}, v \rangle} = f_I(a_{1\langle \mathcal{M}, v \rangle}, \ldots, a_{n\langle \mathcal{M}, v \rangle})$$

$$P(a_1, \ldots, a_n)_{\langle \mathcal{M}, v \rangle} = \chi_{P_I}(a_{1\langle \mathcal{M}, v \rangle}, \ldots, a_{n\langle \mathcal{M}, v \rangle})$$

$$\text{sodaß: } P(a_1, \ldots, a_n)_{\langle \mathcal{M}, v \rangle} = 1 \leftrightarrow P_I(a_{1\langle \mathcal{M}, v \rangle}, \ldots, a_{n\langle \mathcal{M}, v \rangle})$$

$$(\neg A_0)_{\langle \mathcal{M}, v \rangle} = -(A_{0_{\langle \mathcal{M}, v \rangle}})$$

$$\text{sodaß: } (\neg A_0)_{\langle \mathcal{M}, v \rangle} = 1 \leftrightarrow \cdot \neg (A_{0_{\langle \mathcal{M}, v \rangle}} = 1)$$

$$(A_0 \to A_1)_{\langle \mathcal{M}, v \rangle} = A_{0_{\langle \mathcal{M}, v \rangle}} \dashv A_{1_{\langle \mathcal{M}, v \rangle}}$$

$$\text{sodaß: } (A_0 \to A)_{1_{\langle \mathcal{M}, v \rangle}} = 1 \dot{\leftrightarrow} A_{0_{\langle \mathcal{M}, v \rangle}} = 1 \to A_{1_{\langle \mathcal{M}, v \rangle}} = 1$$

$$(\bigwedge_x A_0)_{\langle \mathcal{M}, v \rangle} = \bigsqcap \{A_{\langle \mathcal{M}, v^x/u \rangle} | u \in M\}$$

$$\text{mit } v^x/u = v \backslash \{\langle x, v^l x \rangle\} \dot{\cup} \{\langle x, u \rangle\}$$

$$\text{sodaß: } (\bigwedge_x A_0)_{\langle \mathcal{M}, v \rangle} = 1 \leftrightarrow \bigwedge_{u \in M} (A_{\langle \mathcal{M}, v^x/u \rangle} = 1)$$

$$(\bigvee_x A_0)_{\langle \mathcal{M}, v \rangle} = \bigsqcup \{A_{\langle \mathcal{M}, v^x/u \rangle} | u \in M\}$$

$$\text{sodaß: } (\bigvee_x A_0)_{\langle \mathcal{M}, v \rangle} = 1 \leftrightarrow \bigvee_{u \in M} (A_{\langle \mathcal{M}, v^x/u \rangle} = 1)$$

IntprStr$(M, T) \wedge \mathcal{M} = \langle M, I \rangle \to c_{\mathcal{M}} = c_I = I^l c, f_{\mathcal{M}} = f_I = I^l f$,
$P_{\mathcal{M}} = P_I = I^l P, |\mathcal{M}| = M, \underline{\mathcal{M}} = I$

IntprStr $(M, T) \dot{\rightarrow} \mathrm{Val}(A, M) \leftrightarrow \bigwedge_{v:\mathrm{Var}\rightarrow|M|} A_{\langle M,v\rangle} = 1_{b^2}$
Mod (M, T) $:\leftrightarrow$ Intpr Str $(M, T) \wedge \bigwedge_{A\in \mathrm{Eig}A x_T}$ Val (A, M)
$\mathrm{Mod}_{\mathrm{norm}}(M, T) :\leftrightarrow \mathrm{Mod}(M, T) \wedge \bigwedge_{\dot{u}, y\in|M|} u = my \leftrightarrow u \doteq y.$
T-Val $(A) :\leftrightarrow \bigwedge_M \cdot\mathrm{Mod}(M, T) \rightarrow \mathrm{Val}(A, M).$
L-Val $(A) :\leftrightarrow \bigwedge_M \cdot\mathrm{IntprStr}(M, L) \rightarrow \mathrm{Val}(A, M).$
Damit: $\bigwedge_{A\in \dot{\mathrm{Frm}}_T}$ T-Val (A) $\leftrightarrow \underset{T}{\models} A.$

Cst T $\rightarrow \bigvee_M \mathrm{Mod}^{=\aleph}(M, T)$

Init Ord$(\alpha) \wedge$ Init Ord$(\beta) \wedge \alpha \leq \beta \dot{\rightarrow} \bigvee_M \mathrm{Mod}^{=\alpha}(M, T) \rightarrow$
$\bigvee_M \mathrm{Mod}^{=\beta}(M, T)$

$$\bigvee_M \mathrm{Mod}^{=\aleph_0}(M, T) \leftrightarrow \bigvee_M \mathrm{Mod}^{=\aleph_\alpha}(M, T)$$

Cst $T_= \rightarrow \bigvee_M \mathrm{Mod}^{\leq\aleph_0}_{\mathrm{norm}}(M, T)$

$$\bigvee_M \mathrm{Mod}^{=\aleph_0}_{\mathrm{norm}}(M, T_=) \leftrightarrow \bigvee_M \mathrm{Mod}^{=\aleph_\alpha}_{\mathrm{norm}}(M, T_=)$$

$$\mathrm{Cst}\ Z_P^+ \rightarrow \bigvee_M \mathrm{Mod}^{=\aleph_0}_{\mathrm{norm}}(M, Z_P^+) \text{wegen}$$

$$\neg \bigvee_M \mathrm{Mod}^{<\aleph_0}_{\mathrm{norm}}(M, Z_P^+)$$

$$(\mathrm{Mod}^{<\aleph_0}_{\mathrm{norm}}(M, Z_P^+) \rightarrow \aleph_0 \sim \{S_M^{(k)}(0_M) | k \in |N|\} \subseteq |M| < \aleph_0, \perp)$$

Z_P bedeutet den Peanoformalismus (bei dem das Prinzip der mathematischen Induktion als Axiomenschema vorliegt). Z_P^+ bedeutet eine Erweiterung von Z_P.

Anschrift des Verfassers: Prof. DDr. Curt C. Christian, Institut für Logistik, Universität Wien, Währinger Straße 25, A-1090 Wien.