Sitzungsber. Abt. II (1998) 207: 123–131

Charakterisierung von Derivationen höherer Ordnung mittels Funktionalgleichungen

Von

F. Halter-Koch und **L. Reich**

(Vorgelegt in der Sitzung der math.-nat. Klasse am 15. Oktober 1998
durch das k. M. Franz Halter-Koch)

Abstract

Wir charakterisieren Derivationen höherer Ordnung eines Körpers in sich durch Funktionalgleichungen.

*

In der kommutativen Algebra und in der Theorie der Funktionalgleichungen spielen seit langem Derivationen eine wichtige Rolle. Diese sind Abbildungen eines Körpers K in sich, welche die Produktregel

$$f(xy) = xf(y) + yf(x) \quad \text{für alle} \quad x, y \in K \tag{L}$$

erfüllen. Im Falle $K = \mathbb{R}$ gaben S. Kurepa [1] und W. B. Jurkat [2] die folgende einfache Charakterisierung:

Eine additive Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ist genau dann eine Derivation, wenn die Funktionalgleichung

$$f\left(\frac{1}{x}\right) = -\frac{1}{x^2} f(x) \quad \text{für alle} \quad x \in \mathbb{R}^{\times} \tag{R}$$

gilt (siehe auch [3], *p. 353).*

Die Begriff der Derivationen n-ter Ordnung für $n \in \mathbb{N}$ tritt in einem sehr allgemeinen Rahmen in [4], pp. 216–222, auf. Für $n = 1$ erhält man daraus die mittels (L) erklärten gewöhnlichen Derivationen. Wir legen unseren Untersuchungen die folgende (rekursive) Definition von Derivationen n-ter Ordnung eines Körpers in sich zugrunde.

Definition. Sei K ein Körper. Für eine Funktion $f : K \to K$ definieren wir $\hat{f} : K \times K \to K$ durch

$$\hat{f}(x, y) = f(xy) - xf(y) - yf(x).$$

Wir definieren nun die Menge $\mathrm{Der}_n(K)$ aller Derivationen n-ter Ordnung von K in sich rekursiv nach n: Es sei $\mathrm{Der}_0(K) = \{0\}$, und für $n \geq 1$ sei $f \in \mathrm{Der}_n(K)$ genau dann, wenn f additiv ist und $\hat{f}(\cdot, y) \in \mathrm{Der}_{n-1}(K)$ für alle $y \in K$. Offensichtlich ist $\mathrm{Der}_n(K)$ ein K-Vektorraum bezüglich der punktweisen Addition und Skalarmultiplikation.

Das Ziel dieser Arbeit ist eine Charakterisierung der Derivationen höherer Ordnung als Lösungen von Funktionalgleichungen, welche insbesondere (R) als Spezialfall enthalten.

Lemma. *Sei F der Primkörper von K und $f \in \mathrm{Der}_n(K)$. Dann ist f eine F-lineare Funktion und $f|_F = 0$.*

Beweis: Als additive Funktion ist f eine F-lineare Funtion. Daher genügt es, $f(1) = 0$ zu zeigen. Das geschieht durch Induktion nach n. Für $n = 0$ ist nichts zu zeigen. im Falle $n \geq 1$ ist $f(1) = f(1) + f(1) + \hat{f}(1, 1)$, nach Induktionsvoraussetzung ist $\hat{f}(1, 1) = 0$, und wir erhalten $f(1) = 0$. □

Satz. *Sei K ein Körper, $n \geq 0$ und char(K) $\nmid (n + 1)!$. Sei $f : K \to K$ eine additive Funktion. Dann sind die folgenden Aussagen äquivalent:*

a) $f \in \mathrm{Der}_n(K)$.
b) *Für alle $a \in K$ und $x \in K^\times$ gilt die Funktionalgleichung*

$$f\left(\frac{a}{x}\right) = \sum_{\nu=1}^{n} \binom{n}{\nu} \frac{(-1)^\nu}{x^{\nu+1}} [af(x^\nu) - xf(ax^{\nu-1})].$$

c) *Für alle $x \in K^\times$ gilt die Funktionalgleichung*

$$f\left(\frac{1}{x}\right) = \sum_{\nu=1}^{n} \binom{n+1}{\nu+1} \frac{(-1)^\nu}{x^{\nu+1}} f(x^\nu).$$

d) *Für alle $x \in K^\times$ gilt die Funktionalgleichung*

$$f(x^{n+1}) = \sum_{\nu=1}^{n} \binom{n+1}{\nu} (-1)^{n-\nu} x^{n+1-\nu} f(x^\nu).$$

Beweis: Durch Induktion nach n; für $n = 0$ ist nichts zu beweisen. Sei also $n \geq 1$, und seien alle Behauptungen für $n-1$ gezeigt.

a) $\Rightarrow$ b) Nach Definition der Derivationen n-ter Ordnung gilt

$$f(a) = f\left(\frac{a}{x}x\right) = \frac{a}{x}\,f(x) + xf\left(\frac{a}{x}\right) + \hat{f}\left(\frac{a}{x}, x\right). \qquad (1)$$

Aus der Induktionsvoraussetzung folgt

$$\hat{f}\left(\frac{a}{x}, x\right) = \sum_{\nu=1}^{n-1} \binom{n-1}{\nu} \frac{(-1)^{\nu}}{x^{\nu+1}} [a\hat{f}(x^{\nu}, x) - x\hat{f}(ax^{\nu-1}, x)],$$

und wegen

$$\begin{aligned} &a\hat{f}(x^{\nu}, x) - x\hat{f}(ax^{\nu-1}, x) \\ &\quad = af(x^{\nu+1}) - ax^{\nu}f(x) - axf(x^{\nu}) - xf(ax^{\nu}) \\ &\qquad + ax^{\nu}f(x) + x^2 f(ax^{\nu-1}) \end{aligned}$$

erhalten wir

$$\begin{aligned} \hat{f}\left(\frac{a}{x}, x\right) &= \sum_{\nu=2}^{n} \binom{n-1}{\nu-1} \frac{(-1)^{\nu-1}}{x^{\nu}} af(x^{\nu}) \\ &\quad - \sum_{\nu=1}^{n-1} \binom{n-1}{\nu} \frac{(-1)^{\nu}}{x^{\nu}} af(x^{\nu}) \\ &\quad - \sum_{\nu=2}^{n} \binom{n-1}{\nu-1} \frac{(-1)^{\nu-1}}{x^{\nu-1}} f(ax^{\nu-1}) \\ &\quad + \sum_{\nu=1}^{n-1} \binom{n-1}{\nu} \frac{(-1)^{\nu}}{x^{\nu-1}} f(ax^{\nu-1}) \\ &= \sum_{\nu=2}^{n-1} \binom{n}{\nu} \frac{(-1)^{\nu-1}}{x^{\nu}} af(x^{\nu}) \\ &\quad + \frac{(-1)^{n-1}}{x^{n}} af(x^{n}) + (n-1)\frac{a}{x}\,f(x) \\ &\quad - \sum_{\nu=2}^{n-1} \binom{n}{\nu} \frac{(-1)^{\nu-1}}{x^{\nu-1}} f(ax^{\nu-1}) \\ &\quad - \frac{(-1)^{n-1}}{x^{n-1}}\,f(ax^{n-1}) - (n-1)\,f(a) \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \sum_{\nu=2}^{n-1} \binom{n}{\nu} \frac{(-1)^{\nu-1}}{x^{\nu}} [af(x^{\nu}) - xf(ax^{\nu-1})] \\
&\quad + \frac{(-1)^{n-1}}{x^n} [af(x^n) - xf(ax^{n-1})] + \frac{n-1}{x} [af(x) - xf(a)] \\
&= \sum_{\nu=1}^{n} \binom{n}{\nu} \frac{(-1)^{\nu-1}}{x^{\nu}} [af(x^{\nu}) - xf(ax^{\nu-1})] - \frac{a}{x} f(x) + f(a).
\end{aligned}
$$

Durch Einsetzen in (1) erhalten wir

$$
\begin{aligned}
f\left(\frac{a}{x}\right) &= \frac{1}{x} f(a) - \frac{a}{x^2} f(x) - \frac{1}{x} \hat{f}\left(\frac{a}{x}, x\right) \\
&= \frac{1}{x} f(a) - \frac{a}{x^2} f(x) + \frac{a}{x^2} f(x) - \frac{1}{x} f(a) \\
&\qquad - \sum_{\nu=1}^{n} \binom{n}{\nu} \frac{(-1)^{\nu-1}}{x^{\nu+1}} [af(x^{\nu}) - xf(ax^{\nu-1})] \\
&= \sum_{\nu=1}^{n} \binom{n}{\nu} \frac{(-1)^{\nu}}{x^{\nu+1}} [af(x^{\nu}) - xf(ax^{\nu-1})].
\end{aligned}
$$

b) $\Longrightarrow$ c) Mit $a = 1$ folgt

$$
\begin{aligned}
f\left(\frac{1}{x}\right) &= \sum_{\nu=1}^{n} \binom{n}{\nu} \frac{(-1)^{\nu}}{x^{\nu+1}} f(x^{\nu}) - \sum_{\nu=1}^{n} \binom{n}{\nu} \frac{(-1)^{\nu}}{x^{\nu}} f(x^{\nu-1}) \\
&= \sum_{\nu=1}^{n} \binom{n}{\nu} \frac{(-1)^{\nu}}{x^{\nu+1}} f(x^{\nu}) - \sum_{\nu=1}^{n-1} \binom{n}{\nu+1} \frac{(-1)^{\nu+1}}{x^{\nu+1}} f(x^{\nu}) \\
&= \sum_{\nu=1}^{n-1} \binom{n+1}{\nu+1} \frac{(-1)^{\nu}}{x^{\nu+1}} f(x^{\nu}) + \frac{(-1)^{n}}{x^{n+1}} f(x^{n}) + \frac{n}{x} f(1) \\
&= \sum_{\nu=1}^{n} \binom{n+1}{\nu+1} \frac{(-1)^{\nu}}{x^{\nu+1}} f(x^{\nu}).
\end{aligned}
$$

c) $\Longrightarrow$ d) Für $x \in K \setminus \{0, -1\}$ ist offensichtlich

$$
\frac{1}{x} - \frac{1}{x+1} - \frac{1}{x(x+1)} = 0
$$

und daher auch

$$
f\left(\frac{1}{x}\right) - f\left(\frac{1}{x+1}\right) - f\left(\frac{1}{x(x+1)}\right) = 0,
$$

woraus

$$0=\sum_{\nu=1}^{n}\binom{n+1}{\nu+1}(-1)^{\nu}\left[\frac{f(x^{\nu})}{x^{\nu+1}}-\frac{f((x+1)^{\nu})}{(x+1)^{\nu+1}}-\frac{f((x^2+x)^{\nu})}{x^{\nu+1}(x+1)^{\nu+1}}\right]$$

folgt. Wir multiplizieren diese Gleichung mit $[x(x+1)]^{n+1}$ und erhalten

$$\begin{aligned}0=\sum_{\nu=1}^{n}\binom{n+1}{\nu+1}&(-1)^{\nu}[x^{n-\nu}(x+1)^{n+1}f(x^{\nu})\\&-x^{n+1}(x+1)^{n-\nu}f((x+1)^{\nu})-(x^2+x)^{n-\nu}f((x^2+x)^{\nu})].\end{aligned}$$

Diese letzte Gleichung gilt offensichlich auch für $x=0$ und $x=-1$, also für alle $x\in K$. Wir entwickeln alle Potenzen nach der Binomialformel, ersetzen x duch λx für beliebiges $\lambda\in F$ und erhalten

$$\begin{aligned}0=&\sum_{\nu=1}^{n}\sum_{j=0}^{n+1}\binom{n+1}{\nu+1}\binom{n+1}{j}(-1)^{\nu}x^{n-\nu+j}\lambda^{n+j}f(x^{\nu})\\&-\sum_{\nu=1}^{n}\sum_{j=0}^{n-\nu}\sum_{k=1}^{\nu}\binom{n+1}{\nu+1}\binom{n-\nu}{j}\binom{\nu}{k}(-1)^{\nu}x^{n+1+j}\lambda^{n+1+j+k}f(x^{k})\\&-\sum_{\nu=1}^{n}\sum_{j=0}^{n-\nu}\sum_{k=0}^{\nu}\binom{n+1}{\nu+1}\binom{n-\nu}{j}\binom{\nu}{k}(-1)^{\nu}x^{n+j-\nu}\lambda^{n+j+k}f(x^{k+\nu}).\end{aligned}$$

Für festes x ist diese Relation von der Form

$$\Phi(\lambda)=\sum_{i=n}^{2n+1}A_i\lambda^i=0\quad\text{für alle}\quad\lambda\in F,$$

wobei $A_i=A_i(x)\in K$, und eine einfache Rechnung zeigt, dass $A_n=0$. Das Polynom $\Phi(\lambda)$ hat einen Grad $d\le 2n+1$, und 0 ist eine Nullstelle von Φ, welche mindestens die Ordnung $n+1$ besitzt. Nun ist aber $\Phi(\lambda)=0$ für alle $\lambda\in F$ und $\#F^{\times}\ge n+1$, also folgt $A_i=0$ für alle $i\in\{n,\dots,2n+1\}$. Nun betrachten wir die Relation $A_{n+1}=0$; diese ist von der Form

$$\begin{aligned}0=&\sum_{\nu=1}^{n}\binom{n+1}{\nu+1}(n+1)(-1)^{\nu}x^{n-\nu+1}f(x^{\nu})\\&-\sum_{\nu=1}^{n}\binom{n+1}{\nu+1}(n-\nu)(-1)^{\nu}x^{n-\nu+1}f(x^{\nu})\\&-\sum_{\nu=1}^{n}\binom{n+1}{\nu+1}\nu(-1)^{\nu}x^{n-\nu}f(x^{\nu+1})\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \sum_{\nu=1}^{n} \binom{n+1}{\nu+1} (\nu+1)(-1)^{\nu} x^{n-\nu+1} f(x^{\nu}) \\
&\qquad - \sum_{\nu=2}^{n+1} \binom{n+1}{\nu} (\nu-1)(-1)^{\nu-1} x^{n-\nu+1} f(x^{\nu}) \\
&= -\binom{n+1}{2} 2x^{n} f(x) - n(-1)^{n} f(x^{n+1}) \\
&\qquad + \sum_{\nu=2}^{n} \left[\binom{n+1}{\nu+1}(\nu+1) + \binom{n+1}{\nu}(\nu-1) \right] (-1)^{\nu} x^{n-\nu+1} f(x^{\nu}) \\
&= -n(n+1)x^{n} f(x) - n(-1)^{n} f(x^{n+1}) \\
&\qquad + \sum_{\nu=2}^{n} n \binom{n+1}{\nu} (-1)^{\nu} x^{n-\nu+1} f(x^{\nu}),
\end{aligned}
$$

und daraus folgt

$$
\begin{aligned}
f(x^{n+1}) &= -(-1)^{n}(n+1)x^{n} f(x) \\
&\qquad + \sum_{\nu=2}^{n} \binom{n+1}{\nu} (-1)^{n-\nu} x^{n-\nu+1} f(x^{\nu}) \\
&= \sum_{\nu=1}^{n} \binom{n+1}{\nu} (-1)^{n-\nu} x^{n-\nu+1} f(x^{\nu}).
\end{aligned}
$$

d) $\Longrightarrow$ a) Wir müssen zeigen, dass für jedes $y \in K$ die Abbildung $\hat{f}(\cdot, y)$ eine Derivation der Ordnung $n-1$ ist. Wegen der Induktionsannahme genügt es, zu zeigen, dass für alle $x, y \in K$ die Relation

$$
\hat{f}(x^{n}, y) = \sum_{\nu=1}^{n-1} \binom{n}{\nu} (-1)^{n-1-\nu} x^{n-\nu} \hat{f}(x^{\nu}, y)
$$

besteht. Diese ist aber äquivalent zu

$$
\begin{aligned}
f(x^{n}y) - x^{n} f(y) - y f(x^{n}) = \sum_{\nu=1}^{n-1} \binom{n}{\nu} (-1)^{n-1-\nu} [& f(x^{\nu}y) \\
& - x^{\nu} f(y) - y f(x^{\nu})].
\end{aligned}
$$

Die Summe der mittleren Terme auf der rechten Seite berechnet sich zu

$$
\begin{aligned}
&- \sum_{\nu=1}^{n-1} \binom{n}{\nu} (-1)^{n-1-\nu} x^{n} f(y) = (-1)^{n} x^{n} f(y) \sum_{\nu=1}^{n-1} \binom{n}{\nu} (-1)^{\nu} \\
&\quad = -(-1)^{n} x^{n} f(y)[1 + (-1)^{n}] = -(-1)^{n} x^{n} f(y) - x^{n}(f(y)),
\end{aligned}
$$

und daher genügt es, die Gleichung

$$\begin{aligned} &f(x^n y) - yf(x^n) + (-1)^n x^n f(y) \\ &\quad = \sum_{\nu=1}^{n-1} \binom{n}{\nu} (-1)^{n-1-\nu} x^{n-\nu} [f(x^\nu y) - yf(x^\nu)] \end{aligned}$$

zu verifizieren. Zu diesem Zwecke berechnen wir

$$\begin{aligned} f((x+y)^{n+1}) &= \sum_{\nu=0}^{n+1} \binom{n+1}{\nu} f(x^\nu y^{n+1-\nu}) \\ &= \sum_{\nu=1}^{n} \binom{n+1}{\nu} (-1)^{n-\nu} (x+y)^{n+1-\nu} f((x+y)^\nu) \\ &= \sum_{\nu=1}^{n} \sum_{j=0}^{n+1-\nu} \sum_{k=0}^{\nu} \binom{n+1}{\nu} \binom{n+1-\nu}{j} \binom{\nu}{k} \times \\ &\quad \times (-1)^{n-\nu} x^j y^{n+1-\nu-j} f(x^k y^{\nu-k}). \end{aligned}$$

Wir ersetzen x durch λx für ein beliebiges $\lambda \in F$ und erhalten

$$\begin{aligned} 0 = &\sum_{\nu=0}^{n+1} \binom{n+1}{\nu} \lambda^\nu f(x^\nu f^{n+1-\nu}) \\ &- \sum_{\nu=1}^{n} \sum_{j=0}^{n+1-\nu} \sum_{k=0}^{\nu} \binom{n+1}{\nu} \binom{n+1-\nu}{j} \binom{\nu}{k} \times \\ &\times (-1)^{n-\nu} \lambda^{j+k} x^j f(x^k y^{\nu-k}). \end{aligned}$$

Diese Relation ist ein Polynom in λ vom Grade $d \leq n+1$, welches auf F verschwindet, und wegen $\#F > n+1$ verschwindet es identisch. Insbesondere verschwindet der Koeffizient von λ^n, und das liefert uns die Relation

$$\begin{aligned} 0 = (n+1)f(x^n y) &- \sum_{\nu=1}^{n} \binom{n+1}{\nu} \nu (-1)^{n-\nu} x^{n+1-\nu} f(x^{\nu-1} y) \\ &- \sum_{\nu=1}^{n} \binom{n+1}{\nu} (n+1-\nu)(-1)^{n-\nu} x^{n-\nu} y f(x^\nu) \end{aligned}$$

$$= (n+1)\,f(x^n y) - (n+1)(-1)^{n-1}x^n f(y) - (n+1)\,y f(x^n)$$
$$- \sum_{\nu=2}^{n}\binom{n+1}{\nu}\nu(-1)^{n-\nu}x^{n+1-\nu}f(x^{\nu-1}y)$$
$$- \sum_{\nu=1}^{n-1}\binom{n+1}{\nu}(n+1-\nu)(-1)^{n-\nu}x^{n-\nu}y f(x^{\nu}).$$

Daraus erhalten wir nun leicht

$$f(x^n y) - y f(x^n) + (-1)^n x^n f(y)$$
$$= \sum_{\nu=1}^{n-1}\binom{n}{\nu}(-1)^{n-\nu-1}\,x^{n-\nu}[f(x^{\nu}y) - y f(x^{\nu})]. \qquad \square$$

Man beachte, dass die Funktionalgleichungen des Satzes nur die Funktion f als Unbekannte enthalten. Ist $f: K \to K$ eine Derivation 2. Ordnung, so gilt nach Definition

$$f(xy) = x f(y) + y f(x) + \hat{f}\,(x,y) \quad \text{für alle} \quad x,y \in K, \tag{L$_2$}$$

und dabei ist $\hat{f}\; : K \times K \to K$ eine symmetrische Biderivation erster Ordnung (das heisst, f ist biadditiv, symmetrisch, und bei Festhalten einer Variablen eine Derivation in der anderen). Aus (L$_2$) folgt nun leicht

$$f\left(\frac{1}{x}\right) = -\frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^3}\,\hat{f}\,(x,x) \quad \text{für alle} \quad x \in K^{\times}. \tag{R$'_2$}$$

Damit erhalten wir die folgende Charakterisierung von Derivationen 2. Ordnung, welche sich mit ähnlichen Argumenten wie obiger Satz beweisen lässt:

Bemerkung. Es sei char(K) $\nmid$ 6 und $f: K \to K$ eine additive Funktion. Genau dann ist f eine Derivation 2. Ordnung, wenn es eine symmetrische Biderivation $\hat{f}\; : K \times K \to K$ gibt, so dass (R'_2) erfüllt ist.

Für Derivationen n-ter Ordnung ist (R'_2) zu ersetzen durch die Funktionalgleichung

$$f\left(\frac{1}{x}\right) = -\frac{1}{x^2} + \sum_{k=0}^{n-2}(-1)^k\frac{1}{x^{n+k}}\,\hat{f}_{n-k+1,k+2}(x,\ldots,x) \qquad \text{(R$'_n$)}$$
$$\text{für alle} \quad x \in K^{\times}.$$

Dabei ist $\hat{f}_{l,m} : K^m \to K$ eine symmetrische m-Multiderivation der Ordnung l (das heisst, $\hat{f}_{l,m}$ ist m-fach additiv, symmetrisch und in jeder Variablen eine Derivation der Ordnung l). Allerdings bestehen im Falle $n > 2$

zwischen den in (R_n') auftretenden Multiderivationen $\hat{f}_{l,m}$ weitere Abhängigkeiten (siehe Unger-Reich [5]). Ob und gegebenenfalls unter welchen Zusatzbedingungen die Funktionalgleichung (R_n') Derivationen n-ter Ordnung charakterisiert, muss offen bleiben.

Literatur

[1] Kurepa, S.: The Cauchy functional equation and scalar product in vector spaces. Glasnik Mat.-Fiz. Astromom. **19**, 23–36 (1964).

[2] Jurkat, W. B.: On Cauchy's functional equation. Proc. Am. Math. Soc. **16**, 683–686 (1965).

[3] Kuczma, M.: An introduction to the theory of functional equations and inequalities. Państwowe Wydawnictwo Naukowe Uniwersytet Slaski, Warszawa-Kraków-Katowice, 1985.

[4] Demazure, M., Gabriel, P.: Groupes algébriques. Tome I. Paris: Masson 1970.

[5] Unger, J., Reich, L.: Derivationen höherer Ordnung als Lösungen von Funktionalgleichungen, Grazer Math. Berichte **336** , 1–83 (1998).

Anschrift der Verfasser: Franz Halter-Koch and Ludwig Reich, Institut für Mathematik, Karl-Franzens-Universität, Heinrichstrasse 36/IV, A-8010 Graz, Austria.