Anzeiger Abt. II (1998) 135: 15–21

Isogonale Doppelverhältnisscharen auf Regelflächen

Von

H. Wresnik

(Vorgelegt in der Sitzung der math.-nat. Klasse am 15. Oktober 1998
durch das k. M. Hellmuth Stachel)

1.

Doppelverhältnisscharen (DV-Scharen) auf Regelflächen – sie schneiden die Erzeugenden der Regelfläche nach projektiven Punktreihen – waren wiederholt Gegenstand ausführlicher Untersuchungen ([1],[2], [4],[8]).

Die erste wichtige Arbeit zu diesem Themenkreis stammt von M. Barner [1], der Charakterisierungen von DV-Scharen angeben konnte. Eine analytische Kennzeichnung lautet:

Satz 1. *Eine einparametrige Kurvenschar auf einer Regefläche* $\Phi : \vec{y}(u, v) = \vec{x}(u) + v\vec{e}(u)$ *ist genau eine DV-Schar, wenn der Scharparameter* $v = v(u)$ *einer Riccatischen Differential-gleichung* $v' = A(u)v^2 + B(u)v + C(u)$ *genügt.*

Eine geometrische Kenzeichnung kann über die von den Tangenten an die Scharkurven in den Punkten einer Erzeugenden gebildete Regelfläche Ψ, die sogenannte *transversale Regelfläche* der Schar, gegeben werden:

Satz 2. *Eine einparametrige Kurvenschar auf einer Regelfläche ist genau dann eine DV-Schar, wenn die transversale Regelfläche* Ψ *der Regulus auf einer Quadrik ist.*
Genau für Teilverhältnisscharen (TV-Scharen) ist Ψ *ein hyperbolisches Paraboloid, und genau für Kongruenzscharen (K-Scharen) liegt der Scheitel von* Ψ *im Striktionspunkt der Erzeugenden.*

In [7] untersuchte J. Tölke orthogonale DV-Scharen auf Regelflächen und regte am Schluß seiner Ausführungen die Untersuchung von isogonalen DV-Scharen an. Diese Note ist der Klärung dieser Frage gewidmet.

2.

Unsere Ausführungen spielen im reellen, projektiv abgeschlossenen und falls nötig komplex erweiterten Anschauungsraum, in dem eine Regelfläche ϕ gegeben sei. Legen wir den von E. Kruppa in [3] eingeführten Kalkül zugrunde, dann ist ϕ durch

$$\vec{y}\,(u,v) = \vec{s}\,(u) + v\vec{e}\,(u)$$

mit $\vec{s}\,'^2 = \vec{e}\,^2 = 1$ und $\vec{s}\,'\vec{e}\,' = 0$ gegeben, wobei Ableitungen nach u durch Striche angedeutet werden. Die Leitkurve $\vec{s}$ von ϕ ist die *Striktionslinie* der Regelfläche.

Jeder nichttorsalen Erzeugenden e kann nun ein orthonormiertes Rechtsdreibein zugeordnet werden, dessen Ursprung im Striktionspunkt S der Erzeugenden liegt und das die Dreibeinvektoren

$$\vec{e}, \quad \vec{n} := \frac{\vec{e}\,'}{|\vec{e}\,'|}, \quad \vec{z} := \vec{e} \times \vec{n}$$

besitzt. $\vec{n}(u)$ stellt dabei den *Zentralnormalenvektor* und $\vec{z}(u)$ den *Zentraltangentenvektor* dar. Als Ableitungsgleichungen für die Dreibeinvektoren findet man dann

$$\vec{e}\,' = \kappa\vec{n}, \quad \vec{n}\,' = -\kappa\vec{e} + \tau\vec{z}, \quad \vec{z}\,' = -\tau\vec{n},$$

mit der *Krümmung* $\kappa(u)$ und der *Torsion* $\tau(u)$ der Regelfläche in der Erzeugenden e.

Für den Tangentenvektor $\vec{s}\,'$ der Striktionslinie ergibt sich mit Hilfe des Winkels $\sigma(u)$ zwischen der Erzeugenden und der Striktionslinie die Darstellung:

$$\vec{s}\,' = \cos\sigma\vec{e} + \sin\sigma\vec{z},$$

und der Drall $d(u)$ der Regelfläche berechnet sich dadurch zu

$$d = \frac{\sin\sigma}{\kappa}.$$

3.

Wir geben nun die folgende

Definition. Zwei DV-Scharen ($D1$, $D2$) auf einer Regelfläche heißen α-isogonale DV-Scharen, wenn jede Scharkurve der einen Schar jede Scharkurve der anderen Schar unter dem konstanten Winkel $\alpha \neq 0 \in R$ schneidet. Ist $\alpha = \pi/2$, so sprechen wir von orthogonalen DV-Scharen.

Für die Tangentenvektoren $\vec{t}_1$ und $\vec{t}_2$ der Kurven der beiden Scharen, die im Koordinatensystem $\{S; \vec{e}, \vec{n}, \vec{z}\}$ durch

$$\bar{t}_i = (\cos\sigma + A_i \nu_i^2 + B_i \nu_i + C_i)\vec{e} + \nu_i \kappa \vec{n} + \sin\sigma \vec{z}$$

beschrieben werden können, gilt dann längs einer Erzeugenden

$$\cos\alpha = \frac{\vec{t}_1 \vec{t}_2}{|\vec{t}_1||\vec{t}_2|}$$

bzw., wenn man diese Gleichung quadriert:

$$|\vec{t}_1|^2 |\vec{t}_2|^2 \cos^2\alpha - (\vec{t}_1 \vec{t}_2)^2 = 0. \tag{1}$$

Dies ist ein Polynom 8. Grades in ν, das identisch in ν gelten muß, d.h. die einzelnen Koeffizienten müssen verschwinden. Als Koeffizient von ν^8 ergibt sich sofort

$$A_1^2 A_2^2 (1 - \cos^2\alpha) = 0,$$

woraus wegen $\alpha \neq 0$ o.B.d.A. $A_1 = 0$ folgt. Wir erhalten daher das folgende

Zwischenergebnis. Sind (D_1, D_2) *α-isogonale DV-Scharen, so ist eine der beiden Scharen sogar eine TV-Schar* T_1.

Die Auswertung der weiteren Koeffizienten des Polynoms (1) kann nur mit sehr hohem Rechenaufwand durchgeführt werden, sodaß wir einen anderen Weg einschlagen wollen.

4.

Seien (T_1, D_2) α-isogonale DV-Scharen auf Φ, dann ist nach Satz 2 die transversale Regelfläche Ψ der TV-Schar längs einer Erzeugenden der Regulus auf einem hyperbolischen Paraboloid.

Ψ besitzt nach [7] im begleitenden Koordinatensystem die Gleichung

$$(C_1 + \cos\sigma)x_3^2 - x_1 x_3 \sin\sigma + d(B_1 x_3 + \sin\sigma)x_2 = 0, \tag{2}$$

bzw. die Parameterdarstellung

$$\vec{y}_1(\nu, \lambda) = \begin{pmatrix} \nu \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} \cos\sigma + B_1\nu + C_1 \\ \nu\kappa \\ \sin\sigma \end{pmatrix}. \tag{3}$$

Wird nun jede Erzeugende von Ψ in der Tangentialebene des Schnittpunktes mit der festen Erzeugenden e von Φ um den Winkel α verdreht, so müssen sich die Tangenten an die DV-Schar D_2, also der Regulus auf einem Hyperboloid, ergeben.

Ausgehend von einem im parabolischen Berührnetz der Erzeugenden e von Φ liegenden Regulus Ψ auf einem hyperbolischen Paraboloid mit der Darstellung (2) bzw. (3) – wir verzichten auf die Indizes bei den Parametern B und C von Ψ –, fragen wir nun nach Bedingungen für B und C, damit die durch Verdrehen der Erzeugenden von Ψ entstehende Regelfläche $\sum$ tatsächlich von 2. Ordnung ist.

Für einen Normaleneinsvektor $\vec{n}$ in einem Punkt von Φ ergibt sich mit $W = \sqrt{\kappa^2\nu^2 + \sin^2\sigma}$

$$\vec{n} = \frac{1}{W}\begin{pmatrix} 0, \\ \sin\sigma \\ -\kappa\nu \end{pmatrix},$$

woraus man dann für die zur Richtung $\vec{t}$ einer Erzeugenden von Ψ (siehe (3)) normale Richtung $\vec{t}_n$ in der Tangentialebene findet:

$$\vec{t}_n = \vec{t} \times \vec{n} = \frac{1}{W}\begin{pmatrix} -\kappa^2\nu^2 - \sin^2\sigma \\ \kappa\nu(B\nu + C + \cos\sigma) \\ \sin\sigma(B\nu + C + \cos\sigma) \end{pmatrix}. \tag{4}$$

Da die Vektoren $\vec{t}$ und $\vec{t}_n$ die gleiche Länge besitzen, berechnet sich damit die durch Verdrehen der Erzeugenden von Ψ um den Winkel α entstehende Regelfläche $\sum$ zu

$$\vec{y}(\nu, \lambda) = \begin{pmatrix} \nu \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda(\cos\alpha\,\vec{t} + \sin\alpha\,\vec{t}_n), \tag{5}$$

wobei für $\vec{t}$ und $\vec{t}_n$ die Ergebnisse aus (3) und (4) einzusetzen sind.

Ermittelt man nun aus (5) durch Elimination der Parameter ν and λ die Gleichung von $\sum$, so ergibt sich nach einer längeren Rechnung:

$$\begin{aligned} &z^2\{\kappa^2\cos^2\alpha(y^2 + z^2)[2\kappa(C + \cos\sigma)z^2 + 2\sin\sigma(-\kappa x + By)z \\ &\quad + (1 - \cos 2\sigma)y]^2 - \sin^2\alpha[B(\cos 2\sigma - 1)y^2 \\ &\quad + 2\kappa^2(C + \cos\sigma)xz^2 - \kappa(2C\sin\sigma + \sin 2\sigma)yz \\ &\quad + 2\kappa\sin\sigma(Bxy + \kappa(y^2 + z^2))z]^2\} = 0 \end{aligned} \tag{6}$$

Die noch freien Parameter B und C sind nun so zu bestimmen, daß $\sum$ in höchstens quadratische Bestandteile zerfällt.

Notwendig dafür ist ein entsprechendes Zerfallen der Fernkurve von $\sum$, für die man aus (6) erhält:

$$x_3^4\{\cos^2\alpha(x_2^2+x_3^2)[\kappa(C+\cos\sigma)x_3-\sin\sigma(\kappa x_1-Bx_2)]^2 \\ -\sin^2\alpha[\kappa(C+\cos\sigma)x_1x_3+\sin\sigma(Bx_1x_2+\kappa(x_2^2+x_3^2))]^2\}=0. \tag{7}$$

Die Fernkurve zerfällt also in die vierfach zu zählende Ferngerade der asymptotischen Ebene von e und eine Kurve k_u von 4. Ordnung.

Um ihr Zerfallen in Abhängigkeit von B und C zu studieren, unterscheidet man sinnervoller Weise zwei Fälle:

a) Ist $\alpha=\pi/2$, so zerfällt die Kurve k_u, wie ein Vergleich mit (7) zeigt, für beliebiges B und C in eine doppelt zu zählende Kurve 2. Ordnung.

Da das Zerfallen der Fernkurve aber nur eine notwendige Bedingung für das Zerfallen der Fläche $\sum$ selbst ist, muß diese nun für $\alpha=\pi/2$ auf ein Zerfallen hin untersucht werden. Es ergibt sich für $\sum$ aus (6) zunächst

$$z^2[B(\cos 2\sigma-1)y^2+2\kappa^2(C+\cos\sigma)xz^2-\kappa(2C\sin\sigma+2\sigma)yz \\ +2\kappa\sin\sigma(Bxy+\kappa(y^2+z^2))z]^2=0,$$

und die hier auftretende doppelt zu zählende Fläche dritten Grades zerfällt, wie ein Koeffizientenvergleich mit der Gleichung einer beliebigen Fläche 3. Grades zeigt, genau für $B=0$.

Die TV-Schar T_1 ist damit sogar eine K-Schar, und wir haben somit das bereits von Tölke in [7] angebene Ergebnis (siehe Satz 3).

b) Nun betrachten wir den Fall, daß für den Schnittwinkel α der beiden Scharen $\alpha\neq\pi/2$ gelte. Multipliziert man nun zwei in x_1, x_2 und x_3 homogene Polynome 2. Grades miteinander und führt einen Koeffizientenvergleich mit (7) durch, so zeigt es sich, daß k_u nur für $B=0$ und $C=-\cos\sigma$, also nur für die Orthogonaltrajektorien der Erzeugenden, in zwei Kurven 2. Ordnung zerfällt, sodaß man in diesem Fall für die Fernkurve von $\sum$ erhält:

$$x_3^4(x_2^2+x_3^2)(\cos^2\alpha x_1^2-\sin^2\alpha(x_2^2+x_3^2))=0.$$

Da dies aber nur ein notwendiges Kriterium für das Zerfallen der Regelfläche $\sum$ ist, für die man nun aus (6) die Darstellung

$$z^2(y^2+z^2)[\cos^2\alpha(\kappa xz-\sin\sigma y)^2-\kappa^2\sin^2\alpha z^2(y^2+z^2)]=0 \tag{8}$$

gewinnt, muß nun noch untersucht werden, ob mit k_u auch $\sum$ in quadratische Bestandteile zerfällt, was aber, wie (8) schnell zeigt, nicht der Fall ist. Also gibt es für $\alpha \neq \pi/2$ auf einer Regelfläche Φ keine α-isogonalen DV-Scharen.

Zusammenfassend haben wir somit den folgenden

Satz 3. *Sind $(D_1, D_2)\alpha$-isogonale DV-Scharen auf einer Regelfläche Φ, so muß $\alpha = \pi/2$ gelten, und eine der beiden Scharen ist eine K-Schar. Umgekehrt ist jede von den Orthogonaltrajektorien der Erzeugenden verschiedene K-Schar Teil einer orthogonalen DV-Schar.*

5.

Unsere Überlegungen in 3. lassen noch eine andere Interpretation zu. Dazu betrachten wir die Verhältnisse in der Fernebene ω. E_u sei der Fernpunkt der Erzeugenden e und r_u die Ferngerade der Richtebene des Regulus Ψ.

Die Punkte T_u von r_u sind dann die Fernpunkte der Erzeugenden von Ψ und ihre Verbindungen t_u mit E_u die Ferngeraden der e enthaltenden Tangentialebenen τ von Φ.

Der Fernpunkt einer in τ liegenden Erzeugenden von $\sum$ ist nun jener Punkt auf t_u, der vom entsprechenden Punkt T_u den elliptischen Abstand α besitzt.

Die so erhaltenen Punkte, sie bilden die in 3. untersuchte Fernkurve von $\sum$, bilden daher die Bahnkurve bei einer elliptischen Konchoidenbewegung, bei der ein Punkt T_u auf der festen Geraden r_u läuft und eine T_u enthaltende Gerade stets durch den Punkt E_u geht. Wegen der Ergebnisse in 3. gilt daher der folgende

Satz 4. *Die Bahnkurven einer elliptischen Konchoidenbewegung sind i.a. Kurven 4. Ordnung. Nur für den zum Punkt T_u orthogonalen Punkt tritt eine Bahnkurve von zweiter Ordnung auf. Ist die Führungsgerade r_u des Punktes T_u aber zu E_u totalnormal, so liegt die elliptische Drehung um den Punkt E_u vor, und alle Bahnkurven sind von 2. Ordnung.*

Literatur

[1] Barner, M.: Doppelverhältnisscharen auf Regelflächen. Math. Z. **62**, 55–93 (1955).
[2] Krames, J.: Die windschiefen mit ebenen Fallinien. Sb. d. Österr. Akad. d. Wiss. **172**, 159–172 (1963).
[3] Kruppa, E.: Zur Differentialgeometrie der Strahlflächen und Raumkurven. Sb. d. Österr. Akad. d. Wiss. **157**, 143–176 (1949).
[4] Meirer, K.: Doppelverhältnisscharen, insbesondere Kongruenzscharen ebener Kurven oder Kegellinien auf windschiefen Flächen. Resultate der Mathematik, Vol. **5**, 157–173 (1982).

[5] Sachs, H.: Die Strahlflächen mit durchwegs ebenen Orthogonaltrajektorien der Erzeugenden. Arch. d. Math. Vol. **XXI**, 437–445 (1970).
[6] Sachs, H.: Über Kurven konstanten Striktionsabstandes auf windschiefen Flächen. Mh. Math. **74**, 445–461 (1970).
[7] Tölke, J.: Orthogonale Doppelverhältnisscharen auf Regelflächen. Sb. d. Österr. Akad. d. Wiss. **184**, 99–115 (1975).
[8] Vogler, H.: Räumliche Zwangläufe mit ebenen Bahnkurven. Grazer Math. Ber. **162**, 1–17 (1981).

Anschrift des Verfassers: Univ.-Doz. Dr. H. Wresnik, Institut für Geometrie, TU Graz, Kopernikusgasse 24, A-8010 Graz, Österreich.