Anzeiger Abt. II (1998) 135: 3–9

Strahlensysteme, die linear erzeugt werden und Extremaleigenschaften besitzen

Von

S. S. Stamatakis

(Vorgelegt in der Sitzung der math.-nat. Klasse am 5. März 1998 durch das k. M. Nikolaus K. Stephanidis)

1

Es sei S ein C^5-Strahlensystem des dreidimensionalen euklidischen Raumes E^3, das durch seine Mittenfläche $\overline{OP} = P(u, v)$ und den Einheitsvektor $\bar{e}_3(u, v)$ gegeben ist. Wir betrachten noch die Mittenhüllfläche $\overline{OM} = M(u, v)$ und ein begleitendes orthonormiertes Rechtsdreibein $\mathscr{D} = \{\bar{e}_i(u, v)/i = 1, 2, 3\}$ von S. Wir nehmen an: (a) Die Punkte der Mittenfläche und der Mittenhüllfläche entsprechen sich eineindeutig. (b) Die Mittenhüllfläche ist regulär, eineindeutig sphärisch abbildbar und hat weder Nabelpunkte noch parabolische Punkte.

In [1] hat Hoschek reelle Zahlen $\mu, \nu, \varphi, \omega$ mit $\varphi, \omega \in [0, 2\pi)$ betrachtet, und den Vektor $\bar{\delta} := \overline{PM}$ auf der jeweiligen Mittenebene von S folgender linearen Transformation untergeworfen: Man dreht den Vektor $\mu\bar{\delta}$ durch den Winkel φ um M und erhält den Vektor $\bar{\delta}_1$ und dreht sodann den Vektor $\bar{\delta}_1 + \nu\bar{\delta}$ durch den Winkel ω um P. Man gelangt so zum Vektor

$$\bar{e}^* = -A\bar{\varepsilon} - B\bar{\delta},$$

wobei $\bar{\varepsilon} := \bar{e}_3 \times \bar{\delta}$ und

$$A := -\mu \sin(\varphi + \omega) - \nu \sin\omega, B := -\mu \cos(\varphi + \omega) - \nu \cos\omega \quad (1)$$

ist. Wir bezeichnen mit $S(A, B)$ das Strahlensystem mit der Parameterdarstellung

$$\overline{OQ^*}(u, v; w) = \overline{ON^*}(u, v) + w\bar{e}_3(u, v), \overline{ON^*} := \overline{OP} + \bar{e}^*,$$

und mit $H(S)$ die Klasse aller Strahlensysteme, die man auf diese Weise erzeugen kann.
In Arbeit [3] wurde gezeigt: Die Mittenfläche $\overline{OP^*}$ bzw. die Mittenhüllfläche $\overline{OM^*}$ und die mittlere Krümmung h^* des Strahlensystems $S(A, B)$ sind durch

$$\overline{OP^*} = \overline{OP} - A\bar{\varepsilon} - B\bar{\delta} + w^* \bar{e}_3, \tag{2}$$

$$\overline{OM^*} = \overline{OM} + \operatorname{grad} w^* + w^* \bar{e}_3, \tag{3}$$

und

$$h^* = h(B+1) + RA, \tag{4}$$

bestimmt, wobei

$$w^* := hA - RB, \tag{5}$$

den Abstand des Mittenpunktes P^* von der Mittenebene von S, h die mittlere Krümmung von S und $2R$ die Summe der Hauptkrümmungsradien von M bedeuten.

2

Wir wollen diejenigen Strahlensysteme $S(A, B) \in H(S)$ ermitteln, deren mittlere Krümmung h^* oder der Abstand w^* des Mittenpunktes P^* von der Mittenebene von S Extremwerte annehmen. Die Funktionen h^* und w^* sind linear in μ und ν, also haben sie keine Extremwerte bezüglich μ und ν. Die Strahlensysteme $S(A, B) \in H(S)$, die für ein gegebenes Wertepaar (μ, ν) entstehen, bilden eine Untermenge $S_{\mu,\nu} \subset H(S)$.

Es liege ein Strahlensystem S mit $h^2 + R^2 \neq 0$ (für $h = R = 0$ ist $h^* = w^* = 0$ und die Klasse $H(S)$ besteht aus lauter Normalen-M-Systemen) und ein Wertepaar $(\mu, \nu) \in \mathbb{R}^2 - \{(0, 0)\}$ (für $\mu = \nu = 0$ ist $S_{\mu,\nu} = \{S\}$) vor. Aus (1), (4) und (5) finden wir

$$\begin{aligned} h^*_\varphi &= \mu[h \sin(\varphi + \omega) - R\cos(\varphi + \omega)], \\ h^*_\omega &= h^*_\varphi + v(h \sin\omega - R\cos\omega), \end{aligned} \tag{6}$$

$$\begin{aligned} h^*_{\phi\phi} &= h^*_{\varphi\omega} = \mu[h\cos(\varphi + \omega) + R\sin(\varphi + \omega)], \\ h^*_{\omega\omega} &= h^*_{\varphi\varphi} + v(h\cos\omega + R\sin\omega), \end{aligned} \tag{7}$$

$$\begin{aligned} Dh^* := h^*_{\varphi\varphi} h^*_{\omega\omega} - {h^*_{\varphi\omega}}^2 = \mu v(h\cos\omega + R\sin\omega)[h\cos(\varphi + \omega) \\ + R\sin(\varphi + \omega)], \end{aligned} \tag{8}$$

$$w^*_\varphi = -h^*_{\varphi\varphi}, w^*_\omega = -h^*_{\omega\omega}, w^*_{\varphi\varphi} = w^*_{\varphi\omega} = h^*_\varphi, w^*_{\omega\omega} = h^*_\omega, \tag{9}$$

$$\begin{aligned} Dw^* := w^*_{\varphi\varphi} w^*_{\omega\omega} - {w^*_{\varphi\omega}}^2 = \mu v(h\sin\omega - R\cos\omega)[\mathrm{h}\sin(\varphi + \omega) \\ - R\cos(\varphi + \omega)]. \end{aligned} \tag{10}$$

A. Hinreichend für die Existenz eines Extremwertes der Funktion h^* ist

$$h^*_\varphi = h^*_\omega = 0, \quad h^*_{\varphi\varphi} < 0 \quad (h^*_{\varphi\varphi} > 0), \quad D\,h^* > 0. \tag{11}$$

Aus (8) und (11, iii) folgt $\mu\nu \neq 0$. Das ergibt mit (6) und (11, i)

$$h\sin(\varphi+\omega) - R\cos(\varphi+\omega) = h\sin\omega - R\cos\omega = 0.$$

Wir finden unmittelbar

$$\sin\varphi(h\cos\omega + R\sin\omega) = 0.$$

Wäre nun $h\cos\omega + R\sin\omega = 0$, so auch $h = R = 0$, Wiederspruch. Folglich ist $\sin\varphi = 0$, nämlich $\varphi = 0$ oder $\varphi = \pi$ und

$$h\sin\omega - R\cos\omega = 0. \tag{12}$$

B. Mit der Funktion w^* verfährt man analog und findet: Es ist $\varphi = 0$ oder $\varphi = \pi$ und

$$h\cos\omega + R\sin\omega = 0. \tag{13}$$

Fall I. Es sei $R \equiv 0$, d.h. S ein M-Strahlensystem. Wir orientieren das Dreibein $\mathscr{D}$, sodaß $h > 0$ wird.

A. Aus (12) folgt $\sin\omega = 0$, nämlich $\omega = 0$ oder $\omega = \pi$. Durch Einsetzen dieser Werte von φ, ω in (7) und (8) erhalten wir Tabelle 1.

Tabelle 1

φ	ω	$h^*_{\varphi\varphi}$	Dh^*
0	0	μh	$\mu\nu h^2$
0	π	$-\mu h$	$\mu\nu h^2$
π	0	$-\mu h$	$-\mu\nu h^2$
π	π	μh	$-\mu\nu h^2$

B. Aus (13) folgt $\cos\omega = 0$, nämlich $\omega = \frac{\pi}{2}$ oder $\omega = \frac{3\pi}{2}$ und sodann wegen (9) und (10) die Tabelle 2.

Tabelle 2

φ	ω	$\omega^*_{\varphi\varphi}$	Dw^*
0	$\frac{\pi}{2}$	μh	$\mu\nu h^2$
0	$\dfrac{3\pi}{2}$	$-\mu h$	$\mu\nu h^2$
π	$\dfrac{\pi}{2}$	$-\mu h$	$-\mu\nu h^2$
π	$\dfrac{3\pi}{2}$	μh	$-\mu\nu h^2$

Unter Beachtung der Beziehungen (1) folgt: *Für jedes Wertepaar* $(\mu,\nu)\in\mathbb{R}^2, \mu\nu\neq 0$, *gibt es genau zwei Strahlensysteme* $S_1(A_1,B_1)$, $S_2(A_2,B_2)\in S_{\mu,\nu}$, *wobei*

$$(A_1,B_1)=(0,-\Lambda),(A_2,B_2)=(0,\Lambda),\Lambda:=|\mu|+|\nu|,$$

ist, deren mittlere Krümmung ein Minimum $h_1^*=h(1-\Lambda)$ *bzw. ein Maximum* $h_2^*=h(1+\Lambda)$ *hat, und genau zwei Strahlensysteme* $S_3(A_3,B_3)$, $S_4(A_4,B_4)\in S_{\mu,\nu}$, *wobei*

$$(A_3,B_3)=(-\Lambda,0),(A_4,B_4)=(\Lambda,0),$$

ist, deren Abstand w^* *der Mittenpunkte* P_3^*, P_4^* *aus der Mittenebene von S ein Minimum* $w_3^*=-\Lambda h$ *bzw. ein Maximum* $w_4^*=\Lambda\, h$ *hat.*
Unter Benutzung der Formeln (2) und (3) erhalten wir:

$$\begin{aligned}
\overline{OP_1^*}&=\overline{OP}+\Lambda\bar{\delta},\overline{OP_2^*}=\overline{OP}-\Lambda\bar{\delta},\overline{OM_1^*}=\overline{OM_2^*}=\overline{OM},\\
\overline{OP_3^*}&=\overline{OP}+\Lambda(\bar{\varepsilon}-h\bar{e}_3),\overline{OP_4^*}=\overline{OP}-\Lambda(\bar{\varepsilon}-h\bar{e}_3),\\
\overline{OM_3^*}&=\overline{OM}-\Lambda(grad\, h+h\bar{e}_3),\overline{OM_4^*}=\overline{OM}+\Lambda(\operatorname{grad} h+h\bar{e}_3),
\end{aligned}$$

und ferner

$$\left|\overline{PP_1^*}\right|=\left|\overline{PP_2^*}\right|=\left|\overline{PN_3^*}\right|=\left|\overline{PN_4^*}\right|=\Lambda\left|\bar{\delta}\right|,$$

wobei N_3^*, N_4^* die Projektionen der Punkte M_3^*, M_4^* auf der jeweiligen Mittenebene von S sind. Daraus folgt: *Die Mittenpunkte* P_1^*, P_2^* *der Strahlensysteme* S_1 *und* S_2 *liegen auf der Geraden* $g_1:=PM$ *symmetrisch bzg. P. Die entsprechenden Punkte* M_1^*, M_2^* *der Mittenhüllfläche fallen mit M zusammen. Die Mittenpunkte* P_3^*, P_4^* *der Strahlensysteme* S_3 *und* S_4 *liegen symmetrisch bzg. P auf einer Geraden* g_2, *die durch P geht, senkrecht auf* g_1 *steht und die Richtung* $\bar{\varepsilon}-h\bar{e}_3$ *hat. Die entsprechenden Punkte* M_3^*, M_4^* *der Mittenhüllfläche liegen symmetrisch bzg. M auf einer Geraden* g_3, *die durch M geht und die Richtung* grad $h+h\bar{e}_3$ *hat.*

Fall II. Es sei $R\neq 0$. Wir orientieren nun das Dreibein $\mathscr{D}$, so dass $R>0$ wird.

A. Aus (12) erhalten wir $\cot\omega=\frac{h}{R}$ und $\omega\neq 0,\pi$. Folglich muß gelten

$$\frac{h}{R}=:\lambda=\text{const.},\tag{14}$$

d.h. *die Summe der Hauptdralle von S hat ein konstantes Verhältniss zu der Summe der Hauptkrümmungsradien seiner Mittenhüllfläche M.* An dieser Stelle sei bemerkt, daß auf Grund eines Existenzsatzes von Stephanidis [4] unendlich viele Strahlensysteme existieren, die obige Eigenschaft besitzen.
Es sei $\omega_0:=\operatorname{arccot}\ \lambda, \omega_0\in(0,\pi)$. Dann ist $\sin\omega_0=\frac{1}{\sqrt{1+\lambda^2}}$, $\cos\omega_0=\frac{\lambda}{\sqrt{1+\lambda^2}}$. Folglich erhalten wir wegen (7) und (8) die Tabelle 3.

Tabelle 3

φ	ω	$h^*_{\varphi\varphi}$	Dh^*
0	ω_0	$\mu\sqrt{h^2+R^2}$	$\mu\nu(h^2+R^2)$
0	$\omega_0+\pi$	$-\mu\sqrt{h^2+R^2}$	$\mu\nu(h^2+R^2)$
π	ω_0	$-\mu\sqrt{h^2+R^2}$	$-\mu\nu(h^2+R^2)$
π	$\omega_0+\pi$	$\mu\sqrt{h^2+R^2}$	$-\mu\nu(h^2+R^2)$

B. Aus (13) erhalten wir $\operatorname{tg}\omega = -\frac{h}{R}$ und $\omega \neq \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}$. Es muß also wiederum eine Relation der Gestalt (14) bestehen. Es sei $\omega_1 := \operatorname{arctg}(-\lambda)$, $\omega_1 \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right) \cup \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right]$. Dann ist $\sin\omega_1 = \frac{\varepsilon\lambda}{\sqrt{1+\lambda^2}}$ und $\cos\omega_1 = \frac{-\varepsilon}{\sqrt{1+\lambda^2}}$, $\varepsilon := \operatorname{sgn} h$. Somit erhalten wir aufgrund (9) und (10) Tabelle 4.

Tabelle 4

φ	ω	$\omega^*_{\varphi\varphi}$	Dw^*
0	ω_1	$\varepsilon\mu\sqrt{h^2+R^2}$	$\mu\nu(h^2+R^2)$
0	$\omega_1+\pi$	$-\varepsilon\mu\sqrt{h^2+R^2}$	$\mu\nu(h^2+R^2)$
π	ω_1	$-\varepsilon\mu\sqrt{h^2+R^2}$	$-\mu\nu(h^2+R^2)$
π	$\omega_1+\pi$	$\varepsilon\mu\sqrt{h^2+R^2}$	$-\mu\nu(h^2+R^2)$

Unter Berücksichtigung der Beziehungen (1) finden wir: Es sei S ein Strahlensystem, das die Relation (14) erfüllt. *Für jedes Wertepaar* $(\mu,\nu) \in \mathbb{R}^2, \mu\nu \neq 0$, *gibt es genau zwei Strahlensysteme* $S_1(A_1, B_1)$, $S_2(A_2, B_2) \in S_{\mu,\nu}$, *wobei*

$$(A_1, B_1) = \left(\frac{-\Lambda}{\sqrt{1+\lambda^2}}, \frac{-\lambda\Lambda}{\sqrt{1+\lambda^2}}\right),$$
$$(A_2, B_2) = \left(\frac{\Lambda}{\sqrt{1+\lambda^2}}, \frac{\lambda\Lambda}{\sqrt{1+\lambda^2}}\right), \Lambda := |\mu| + |\nu|,$$

ist, deren mittlere Krümmung ein Minimum $h_1^* = h - \Lambda R\sqrt{1+\lambda^2}$ *bzw. ein Maximum* $h_2^* = h + \Lambda R\sqrt{1+\lambda^2}$ *hat, und genau zwei Strahlensysteme* $S_3(A_3, B_3)$, $S_4(A_4, B_4) \in S_{\mu,\nu}$, *wobei*

$$(A_3, B_3) = \left(\frac{-\lambda\Lambda}{\sqrt{1+\lambda^2}}, \frac{\Lambda}{\sqrt{1+\lambda^2}}\right), (A_4, B_4) = \left(\frac{\lambda\Lambda}{\sqrt{1+\lambda^2}}, \frac{-\Lambda}{\sqrt{1+\lambda^2}}\right),$$

ist, deren Abstand der Mittenpunkte P_3^*, P_4^* *aus der Mittenebene von* S *ein Minimum* $w_3 = -\Lambda\, \mathrm{R}\sqrt{1+\lambda^2}$ *bzw. ein Maximum* $w_4 = \Lambda\, \mathrm{R}\sqrt{1+\lambda^2}$ *hat.*
Weiter finden wir unter Benutzung von (2) und (3):

$$\begin{aligned}
\overline{OP_1^*} &= \overline{OP} + \Lambda \frac{\lambda\bar{\delta}+\bar{\varepsilon}}{\sqrt{1+\lambda^2}}, \overline{OP_2^*} = \overline{OP} - \Lambda \frac{\lambda\bar{\delta}+\bar{\varepsilon}}{\sqrt{1+\lambda^2}},\\
\overline{OM_1^*} &= \overline{OM_2^*} = \overline{OM},\\
\overline{OP_3^*} &= \overline{OP} - \frac{\Lambda}{\sqrt{1+\lambda^2}}\left[\bar{\delta} - \lambda\bar{\varepsilon} + \mathrm{R}(1+\lambda^2)\bar{e}_3\right],\\
\overline{OP_4^*} &= \overline{OP} + \frac{\Lambda}{\sqrt{1+\lambda^2}}\left[\bar{\delta} - \lambda\bar{\varepsilon} + \mathrm{R}(1+\lambda^2)\bar{e}_3\right],\\
\overline{OM_3^*} &= \overline{OM} - \Lambda\sqrt{1+\lambda^2}(\operatorname{grad}\mathrm{R} + \mathrm{R}\bar{e}_3),\\
\overline{OM_4^*} &= \overline{OM} + \Lambda\sqrt{1+\lambda^2}(\operatorname{grad}\mathrm{R} + \mathrm{R}\bar{e}_3),
\end{aligned}$$

und ferner

$$\left|\overline{PP_1^*}\right| = \left|\overline{PP_2^*}\right| = \left|\overline{PN_3^*}\right| = \left|\overline{PN_4^*}\right| = \Lambda\left|\bar{\delta}\right|,$$

wobei N_3^*, N_4^* die Projektionen der Punkte M_3^*, M_4^* auf der jeweiligen Mittenebene von S sind. Daraus folgt: *Die Mittenpunkte* P_1^*, P_2^* *der Strahlensysteme* S_1 *und* S_2 *liegen symmetrisch bzg.* P *auf einer Geraden* g_1, *die durch* P *geht und die Richtung* $\lambda\,\bar{\delta} + \bar{\varepsilon}$ *hat. Die entsprechenden Punkte* M_1^*, M_2^* *der Mittenhüllfläche fallen mit* M *zusammen. Die Mittenpunkte der Strahlensysteme* S_3 *und* S_4 *liegen symmetrisch bzg.* P *auf einer Garaden* g_2, *die durch* P *geht und die Richtung* $\bar{\delta} - \lambda\bar{\varepsilon} + \mathrm{R}(1+\lambda^2)\bar{e}_3$ *hat. Die entsprechenden Punkte* M_3^*, M_4^* *der Mittenhüllfläche liegen symmetrisch bzg.* M *auf einer Geraden* g_3, *die durch* M *geht und die Richtung grad* $\mathrm{R} + \mathrm{R}\bar{e}_3$ *hat.*

3

Wir wenden uns zu den Strahlensystemen, bei denen eine Relation der Gestalt $\frac{h}{\mathrm{R}} =: \lambda = \text{cost.}, \mathrm{R} \neq 0$, besteht.

Für die Vektorfelder $\bar{\delta}$ und $\bar{\varepsilon}$ gilt bekanntlich [2, S. 178]

$$\operatorname{div}\bar{\delta} = \operatorname{rot}\bar{\varepsilon} = -2R, \operatorname{rot}\bar{\delta} = -\operatorname{div}\bar{\varepsilon} = -2h, \tag{15}$$

also $\operatorname{rot}(\bar{\delta} - \lambda\bar{\varepsilon}) = 0$. Daher ist das Vektorfeld $\bar{\delta} - \lambda\bar{\varepsilon}$ ein Gradient. Es existiert somit eine Funktion $f = f(u, v)$, sodaß

$$\bar{\delta} - \lambda\bar{\varepsilon} = \operatorname{grad} f. \tag{16}$$

Wir betrachten die Differentialformen $\omega_{\mathrm{ij}} :=< d\,\bar{e}_{\mathrm{j}}, \bar{e}_{\mathrm{i}} >, \mathrm{i}, \mathrm{j} = 1, 2, 3$, wobei $<,>$ das Skalarprodukt des E^3 bedeutet, und bezeichnen mit Δf den zweiten Beltramischen Operator von f in Bezug auf die erste

Grundform $\mathrm{I} = \omega_{31}^2 + \omega_{32}^2$ von S. Aus der bekannten Formel $\Delta f = \operatorname{div}(\operatorname{grad} f)$, (15) und (16) folgt dann $\Delta f = \operatorname{div} \bar{\delta} - \lambda \operatorname{div} \bar{\varepsilon} = -2R - 2\lambda h$, also wegen (14)

$$-\frac{\Delta f}{2\,R} = 1 + \lambda^2.$$

Aus $<\overline{PM}, \bar{e}_3> = 0$ erhalten wir $< dM - dP, \bar{e}_3> + <\overline{PM}, d\,\bar{e}_3> = 0$, welche sich wegen $< dM, \bar{e}_3> = 0$ zu $< dP, \bar{e}_3> = <\bar{\delta}, \bar{e}_3>$ reduziert. Für das Differential der Funktion f erhalten wir dann $\mathrm{d}f = <\operatorname{grad} f, d\,\bar{e}_3> = < dP, \bar{e}_3> - \lambda<\bar{\varepsilon}, d\,\bar{e}_3>$.

Die Ergebnisse dieses Paragraphen fassen wir folgendermaßen zusammen: *Es sei S ein Strahlensystem, dessen Summe der Hauptdralle ein konstantes Verhältnis zu der Summe der Hautkrümmungsradien seiner (nicht minimalen) Mittenhüllfläche M hat. Dann ist das Vektorfeld* $\bar{\delta} - \lambda\bar{\varepsilon}$ *das Gradient einer Lösung* $f = f(u, v)$ *der Differentialgleichung* $-\frac{\Delta f}{2\,R} = 1 + \lambda^2$. *Das Differential der Funktion* $f = f(u, v)$ *ist die Differentialform* $< dP, \bar{e}_3> - \lambda<\bar{\varepsilon}, d\,\bar{e}_3>$.

Literatur

[1] Hoschek, J.: Öffnungsstrecke und Öffnungswinkel geschlossener Kongruenzflächen. Math. Nachr. **60**, 35–42 (1974).
[2] Hoschek, J.: Liniengeometrie. Zürich: Bibliographisches Institut 1971.
[3] Koltsaki, P., Stamatakis, S.: Über eine von J. Hoschek erzeugte Klasse von Strahlensystemen. Manuscripta Math. **55**, 359–372 (1986).
[4] Stephanidis, N. K.: Existenzfragen für Strahlensysteme. Arch. Math. **14**, 430–440 (1963).

Anschrift des Verfassers: S. S. Stamatakis, Mathematisches Intitut der Aristoteles Universität von Thessaloniki, GR-54006 Thessaloniki.