Sitzungsber. Abt. II (1999) 208: 3–20

q-Catalan- und q-Motzkinzahlen

Von

J. Cigler

(Vorgelegt in der Sitzung der math.-nat. Klasse am 25. März 1999
durch das w. M. Johann Cigler)

Herrn Prof. Dr. L. Schmetterer zum 80. Geburtstag gewidmet

Summary

Inspired by ideas of [1] and [3] this paper wants to give new insights into some q-analogs of Catalan und Motzkin numbers.

1

Sei W_n die Menge aller Wörter $x_{i_1}x_{i_2}\ldots x_{i_n}$ der Länge n über dem Alphabet $\{x_{-1}, x_0, x_1, x_2, \ldots\}$, welche $i_1 + i_2 + \cdots + i_k \leq -1$ für alle $k \geq 1$ erfüllen (vgl. z.B. [7] oder [9]). Diese Wörter lassen sehr unterschiedliche kombinatorische Deutungen zu. Wir wollen sie hier als positive Gitterwege von (0, 0) nach $\left(n, -\sum_{j=1}^{n} i_j\right)$ interpretieren. Dabei entspricht dem Symbol x_{-1} ein „Aufstieg" (1, 1) der Höhe 1 und jedem anderen x_i ein „Abstieg" $(1, 1-i)$ der Höhe $1-i$. Wir ordnen nun jedem Buchstaben x_i ein Gewicht $w(x_i) \in \mathbf{N}$ zu, wobei $w(x_{-1}) = 1$ sei. Die „Höhe" eines Wortes $x_{i_1}x_{i_2}\ldots x_{i_n}$ sei die Zahl $\alpha_n = h(x_{i_1}\ldots x_{i_n}) = -(i_1 + \cdots + i_n) - 1$. Dann ist $\alpha_n + 1$ die Höhe des Gitterweges an der n-ten Stelle. Unter dem Gewicht eines Wortes wollen wir das Produkt des Gewichts der Buchstaben und der q^{α_i} verstehen; genauer sei

$$w(x_{i_1}\ldots x_{i_n}) = w(x_{i_1})\ldots w(x_{i_n})q^{\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_n}. \tag{1}$$

Ähnliche Gewichte wurden auch in [9] oder [10] betrachtet.

Aus (1) ergibt sich sofort, daß

$$w(x_{i_1}\dots x_{i_k}x_{i_{k+1}}\dots x_{i_n}) = q^{-i_k+i_{k+1}}w(x_{i_1}\dots x_{i_{k+1}}x_{i_k}\dots x_{i_n}) \qquad (2)$$

gilt.

Das legt es nahe, jedem Wort $x_{i_1}x_{i_2}\dots x_{i_n}$ das entsprechende Wort $\varphi(x_{i_1}x_{i_2}\dots x_{i_n}) = y_{i_1}y_{i_2}\dots y_{i_n}$ in den Symbolen y_i zuzuordnen, welche die q-Kommutationsregeln

$$y_iy_j = q^{-i+j}y_jy_i \qquad (3)$$

erfüllen.

Speziell gilt dann $y_{-1}\,y_{r-1} = q^r y_{r-1}\,y_{-1}$, wobei $r \geq 1$ sei.

Nun kann man den q-binomischen Lehrsatz ([11], [4]) anwenden und erhält

$$(y_{-1}+y_{r-1})^n = \sum_{k=0}^{n} \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_{q^r} y_{r-1}^{k}y_{-1}^{n-k}.$$

Daraus lassen sich sehr einfach einige nützliche Hilfsresultate ableiten: Bezeichnet man mit $V_{n,k}$ die Menge aller Wörter, in welchen k Symbole x_{r-1} und $n-k$ Symbole x_{-1} vorkommen, so ist also

$$w(V_{n,k}) = \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_{q^r} w(x_{r-1}^{k}x_{-1}^{n-k}).$$

Man rechnet leicht nach, daß

$$w(x_{r-1}^{k}x_{-1}^{n-k}) = q^{n(n-rk)+r\binom{k}{2}-\binom{n+1}{2}}$$

gilt.

Interpretiert man ein Wort aus $V_{n,k}$ als einen (nicht notwendig positiven) Gitterweg von (0, 0) nach $(n,\ n-rk)$, so ergibt sich also, daß das Gewicht dieser Wege gegeben ist durch

$$w(V_{n,k}) = \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_{q^r} q^{n(n-rk)-\binom{n+1}{2}+r\binom{k}{2}}. \qquad (4)$$

Als weiteres Hilfsmittel für später berechnen wir das Gewicht der Menge $U_{k,x}$ aller positiven Gitterwege von $(0, (r-1)k)$ nach $(k+x, x)$ für ein $x \geq 1$, welche mit einem Aufstieg beginnen und genau k Abstiege haben. Jedem solchen Weg entspricht ein Wort der Form $x_{-1}v$, wobei $v \in V_{k+x-1,k}$ ist. Daher ist nach (4)

$$w(U_{k,x}) = \begin{bmatrix} x+k-1 \\ k \end{bmatrix}_{q^r} w(x_{-1}x_{r-1}^{k}x_{-1}^{x-1})$$

und wegen $w(x_{-1}x_{r-1}^{k}x_{-1}^{x-1}) = q^{(r-1)\binom{k+1}{2}+\binom{x}{2}}$ (man beachte, daß der erste Punkt des Gitterweges die Höhe $(r-1)k+1$ besitzt) gilt also

$$w(U_{k,x}) = q^{(r-1)\binom{k+1}{2}+\binom{x}{2}} \begin{bmatrix} x+k-1 \\ k \end{bmatrix}_{q^r}. \tag{5}$$

Sei nun $A(n,x)$ das Gesamtgewicht der Menge $W_n(x)$ aller Wörter $z \in W_n$ der Höhe $h(z) = \alpha_n = x-1$, d.h. der positiven Gitterwege von $(0,0)$ nach (n,x). Für diese Zahlen gelten die folgenden wichtigen Beziehungen:

$$A(n,x) = q^{x-1}(A(n-1,x-1) + \sum_{i\geq 0} w(x_i)A(n-1,x+i)) \tag{6}$$

und

$$A(n,x+y) = \sum_{k=0}^{n} A(n-k,x)A(k,y)q^{kx} \tag{7}$$

mit den Randbedingungen

$$A(n,0) = \delta_{n,0} \text{ und } A(0,k) = \delta_{k,0}. \tag{8}$$

Denn für $x_{i_1}x_{i_2}\ldots x_{i_n} = zx_{i_n} \in W_n(x)$ ist $w(x_{i_1}x_{i_2}\ldots x_{i_n}) = w(zx_{i_n}) = w(z)w(x_{i_n})q^{x-1}$ mit $z \in W(x+i_n)$, woraus sich (6) ergibt.

Ist $x_{i_1}x_{i_2}\ldots x_{i_n} = sz \in W_n(x+y)$, wobei s das längste Anfangsstück des Wortes ist mit $s \in W_n(x)$, so ist $z \in W_n(y)$ und $w(sz) = w(s)w(z)q^{kx}$, wobei k die Länge von z ist. Daraus folgt unmittelbar (7).

2

Als Beispiel betrachten wir den Fall, wo $w(x_{-1}) = w(x_{r-1}) = 1$ für ein $r \geq 1$ ist und alle anderen Buchstaben das Gewicht 0 haben. Wir sprechen kurz von Wörtern vom Typ r.

Bezeichnen wir das entsprechende Gewicht von $W_n(x)$ mit $A^{(r)}(n,x)$, so gilt also

$$A^{(r)}(n,x) = q^{x-1}(A^{(r)}(n-1,x-1) + A^{(r)}(n-1,x+r-1)). \tag{9}$$

Für r = 2 ergibt sich

$$(A^{(2)}(n,k))_0^6 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & q & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & q & 0 & q^3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & q^2[2]_{q^2} & 0 & q^6 & 0 & 0 \\ 0 & q^2+q^4 & 0 & q^4[3]_{q^2} & 0 & q^{10} & 0 \\ 0 & 0 & q^3+2q^5+q^7+q^9 & 0 & q^7[4]_{q^2} & 0 & q^{15} \end{pmatrix} \tag{10}$$

Im Fall $q=1$ gilt $A^{(r)}(rn+x,x)=G_n(x,r)$, wobei

$$G_n(x,r)=\frac{x}{rn+x}\binom{rn+x}{n}$$

die Gouldpolynome bezeichnet, weil beide Ausdrücke die Anzahl der positiven Gitterwege von $(0,0)$ nach $(rn+x,x)$ zählen (vgl. z.B. [5]). Dieser Zusammenhang bleibt auch beim Übergang zu den q-Analoga sinngemäß erhalten.

Unter den q-Gouldpolynomen $G_n(x,r,q)$ verstehen wir die Funktionen, die durch

$$G_n(x+1,r,q)-G_n(x,r,q)=q^x G_{n-1}(x+r,r,q) \tag{11}$$

und die Randbedingungen

$$G_0(x,r,q)=1,\, G_n(0,r,q)=\delta_{n,0} \tag{12}$$

eindeutig festgelegt sind (vgl. [5]).

Z.B. ist für $r=2$

$$(G_n(k,2,q))=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots \\ 0 & 1 & 1+q & \cdots \\ 0 & 1+q & 1+2q+q^2+q^3 & \cdots \\ 0 & 1+2q+q^2+q^3 & 1+3q+3q^2+3q^3+2q^4+q^5+q^6 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \end{pmatrix}$$

Zum besseren Verständnis bemerken wir, daß die q-Gouldpolynome die positiven Gitterwege von (0, 0) nach $(rn+x,x)$ mit dem folgenden Gewicht versehen: Wir können ein Wort $x_{i_1}x_{i_2}\ldots x_{i_{rn+x}}$ mit n Abstiegen x_{r-1} eindeutig durch die Folge $c_n\ldots c_2c_1$ der Höhen jener n Anfangswörter beschreiben, die mit einem Abstieg enden. Diese erfüllt $0\leq c_1<x$ und $c_{i+1}\leq c_i+r-1$.
Mit diesen Bezeichnungen gilt

$$G_n(x,r,q)=q^{c_1+\cdots+c_n}. \tag{13}$$

Denn sei $H_n(x,r,q)=q^{c_1+\cdots+c_n}$. Dann ist

$$H_n(x+1,r,q)=H_n(x,r,q)+q^x H_{n-1}(x+r,r,q)$$

erfüllt, weil beide Seiten das Gewicht der Folgen $c_n\ldots c_2c_1$ mit $c_1<x+1$ messen. Die Randbedingungen sind trivialerweise erfüllt.

Daraus ergibt sich

$$A^{(r)}(rn+x,x)=q^{n\binom{r}{2}+\binom{x}{2}}G_n(x,r,q^r). \tag{14}$$

Zum Beweis bemerken wir zunächst, daß $A^{(r)}(n, x) \neq 0$ nur für $n \equiv x (\mathrm{mod}\ r)$ möglich ist, wie sofort aus (9) folgt.
Sei nun $f(n, x) := q^{-\binom{r}{2}n - \binom{x}{2}} A^{(r)}(rn + x, x)$.

Dann ergibt sich ebenfalls aus (9)

$$f(n, x+1) - f(n, x) = q^{rx} f(n-1, x+r).$$

Ein Vergleich mit (11) liefert dann das behauptete Resultat.

Speziell ergibt sich

$$A^{(r)}(rn+1, 1) = q^{n\binom{r}{2}} C_n^r(q^r) \tag{15}$$

wobei die $C_n^r(q)$ die in [5] betrachteten verallgemeinerten q-Catalanzahlen sind.

3

Wir wollen nun im Fall $r = 2$ ein q-Analogon von zwei wohlbekannten Catalandreiecken ableiten:
Wir zerlegen die positiven Gitterwege von (0, 0) nach $(2(m+n)+1, 1)$ in die Wege von (0, 0) nach $(2n+1, 2i+1)$ und die Restwege von $(2n+1, 2i+1)$ nach $(2(m+n)+1, 1)$, die wegen der Symmetrie zwischen Aufstiegen und Abstiegen dasselbe Gewicht wie die positiven Wege von (0, 0) nach $(2m+1, 2i+1)$ haben.

Für die Gewichte gilt $\sum A^{(2)}(2n+1, 2i+1)\ q^{-2i}\ A^{(2)}(2m+1, 2i+1) = A^{(2)}(2m+2n+1, 1)$, weil das Gewicht des Punktes $(2n+1, 2i+1)$ in der Summe doppelt gezählt wird.

Das kann auch folgendermaßen formuliert werden:
Sei $C_{n,i}(q) = A^{(2)}(2n+1, 2i+1)$. Dann ist $C_{0,i} = \delta_{0,i}$ und
$\sum_{i=0}^{\min(n,m)} C_{n,i}(q)\ C_{m,i}(q) q^{-2i} = C_{m+n,0}(q) = q^{m+n} C_{n+m}^2(q^2)$ oder in Matrixform

$$\begin{pmatrix} C_{0,0} & 0 & 0 & \dots \\ C_{1,0} & C_{1,1} & 0 & \dots \\ C_{2,0} & C_{2,1} & C_{2,2} & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_{0,0} & C_{1,0} & C_{2,0} & \cdots \\ 0 & \frac{C_{1,1}}{q^2} & \frac{C_{2,1}}{q^2} & \dots \\ 0 & 0 & \frac{C_{2,2}}{q^4} & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C_{0,0} & C_{1,0} & C_{2,0} & \cdots \\ C_{1,0} & C_{2,0} & C_{3,0} & \dots \\ C_{2,0} & C_{3,0} & C_{4,0} & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \end{pmatrix} \tag{16}$$

Die $C_{i,j}$ lassen sich auch durch eine einfache Rekurrenz beschreiben.

Da jeder Weg, der in $(2n+1, 1)$ endet, entweder über $(2n-1, 1)$ oder über $(2n-1, 3)$ gehen muß, ist

$$C_{n,0} = qC_{n-1,0} + qC_{n-1,1}$$

und analog ergibt sich für $i \geq 1$, daß jeder Weg nach $(2n+1, 2i+1)$ mit $x_1x_1, x_{-1}x_1, x_1x_{-1}, x_{-1}x_{-1}$ enden muß. Daher ist

$$C_{n,i} = q^{4i-1}\left(C_{n-1,i-1} + (1+q^2)C_{n-1,i} + q^2 C_{n-1,i+1}\right).$$

Z.B. ergibt sich

$$(C_{n,k})_0^3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ q & q^3 & 0 & 0 \\ q^2+q^4 & q^4+q^6+q^8 & q^{10} & 0 \\ q^3+2q^5+q^7+q^9 & q^5+2q^7+2q^9+2q^{11}+q^{13}+q^{15} & q^{11}+q^{13}+q^{15}+q^{17}+q^{19} & q^{21} \end{pmatrix}$$

Speziell rechnet man sofort nach, daß $C_{n,n} = q^{n(2n+1)}$ und daher $(C_{n,n})^2\, q^{-2n} = q^{4n^2}$ ist. Daher ergibt sich

$$\det\left(C_{i+j,0}\right)_{i,j=0}^{n-1} = q^{4\sum_1^{n-1} i^2}. \tag{17}$$

Beachtet man (15), so ergibt sich schließlich für die Hankelmatrix der Carlitz'schen q-Catalanzahlen $\left(C_n^2(q)\right)$, die durch

$$C_{n+1}^2(q) = \sum_{k+l=n} q^k C_k^2(q) C_l^2(q)$$

und $C_0^2(q) = 1$ definiert sind (vgl. [8]), die Gleichung

$$\det\left(C_{i+j}^2(q)\right)_{i,j=0}^n = q^{2\sum_1^n i^2 - \binom{n+1}{2}} = q^{\frac{n(n+1)(4n-1)}{6}}. \tag{18}$$

Interessant ist auch die folgende Tatsache, die sich sehr einfach beweisen läßt und wahrscheinlich bekannt ist. (Man vgl. [1], wo etwas ähnliches für Motzkinzahlen gemacht wird).

$$C_{n-1,i}C_{n,j} - C_{n,i}C_{n-1,j} \tag{19}$$

ist für $0 \leq i \leq j$ ein Polynom in q mit nicht negativen Koeffizienten.

Das zeigt man leicht mit Induktion nach n.

Für $1 \leq i \leq j$ ist zu zeigen, daß

$$\begin{aligned}&\left(C_{n-1,i-1} + (1+q^2)C_{n-1,i} + q^2C_{n-1,i+1}\right)\left(C_{n,j-1} + (1+q^2)C_{n,j} + q^2C_{n,j+1}\right)\\ &- \left(C_{n-1,j-1} + (1+q^2)C_{n-1,j} + q^2C_{n-1,j+1}\right)\left(C_{n,i-1} + (1+q^2)C_{n,i} + q^2C_{n,i+1}\right)\end{aligned}$$

nichtnegative Koeffizienten als Polynom in q hat. Das ist für $i+2 \leq j$ klar. Für $j = i+1$ brauchen wir bloß die Terme mit $C_{n,i}C_{n-1,i+1}$ und $C_{n,i+1}C_{n-1,i}$

extra betrachten. Hier ist zu zeigen, daß der Ausdruck $(1+q^2)^2 C_{n-1,i} C_{n,i+1} + q^2 C_{n-1,i+1} C_{n,i} - (1+q^2)^2 C_{n-1,i+1} C_{n,i} + q^2 C_{n-1,i} C_{n,i+1}$ nichtnegative Koeffizienten hat. Das ist aber klar, weil er in der Form $[(1+q^2)^2 - q^2]. [C_{n-1,i} C_{n,i+1} - C_{n-1,i+1} C_{n,i}]$ geschrieben werden kann. Der Fall $i = 0, j > 0$ ist noch einfacher.

Als Korollar ergibt sich für die q-Catalanzahlen $C_n^2(q)$:

$$C_{n-1}^2(q) C_{n+1}^2(q) - (C_n^2(q))^2 \tag{20}$$

hat nichtnegative Koeffizienten.

Denn diese Aussage ist äquivalent damit, daß

$$C_{n-1,0}(C_{n,0} + C_{n,1}) - C_{n,0}(C_{n-1,0} + C_{n-1,1})$$

nichtnegative Koeffizienten hat. Diese ist aber nach obigem klar.

4

Ganz analog zeigt man, daß sich jeder Weg von $(0,0)$ nach $(2n+2m+1,1)$ in einen Weg von $(0,0)$ nach $(2n,2i)$ und einen Restweg von $(2n,2i)$ nach $(2n+2m+1,\ 1)$ zerlegen läßt. Das Gewicht aller Restwege ist $A^{(2)}(2m+2,2i)$. Folglich gilt.

$$\sum_{i=1}^{n} A^{(2)}(2n,2i) q^{-2i+1} A^{(2)}(2m+2,2i) = A^{(2)}(2m+2n+1,1).$$

Setzt man nun $D_{n,i} := A^{(2)}(2n,2i)$, so ist $D_{0,i} = \delta_{0i}$, $D_{n,0} = \delta_{n,0}$ und

$$D_{n,1} = A^{(2)}(2n,2) = A^{(2)}(2n+1,1) = q^n C_n^2(q^2).$$

Daher ergibt sich

$$\sum_{i=1}^{n} D_{n,i} D_{m,i} q^{-2i+1} = D_{m+n-1,1}. \tag{21}$$

Das kann wieder als eine entsprechende Matrixgleichung geschrieben werden, wo rechts eine Hankelmatrix mit q-Catalanzahlen auftritt.

Für die $D_{n,i}$ zeigt man wie oben, daß die Rekurrenz

$$D_{n,i} = q^{4i-3}(D_{n-1,i-1} + (1+q^2) D_{n-1,i} + q^2 D_{n-1,i+1}), n > 0, i \geq 1$$

gilt mit $D_{0,i} = \delta_{0i}$ und $D_{n,0} = \delta_{n,0}$.

Bemerkung. Eine ähnliche Rekurrenz wurde auch in [5], (1) gefunden. Haben die $C_{n,i}^{(2)}$ die dort angegebene Bedeutung, so leitet man leicht ab, daß die obige Aussage äquivalent ist mit

$$\sum_{i=1}^{n} C_{n,i}^{(2)} C_{m,i}^{(2)} q^{-i+1} = C_{m+n-1}^{(2)},$$

wobei rechts wieder die üblichen q-Catalanzahlen von Carlitz auftreten.

Man rechnet wieder leicht nach, daß $D_{n,n} = q^{4\binom{n+1}{2}-3n}$ und daher $D_{n,n}^2 q^{-2n+1} = q^{(2n-1)^2}$ ist. Daher ergibt sich für die Hankelmatrix der $D_{i,1}$ die Gleichung

$$\det(D_{i+j-1,1})_{i,j=1}^{n} = q^{\sum_1^n (2i-1)^2}.$$

Daraus ergibt sich wieder für die Carlitz'schen q-Catalanzahlen die Identität

$$\det(C_{i+j-1}^2(q))_{i,j=1}^{n} = q^{\frac{n(n-1)(4n+1)}{6}}. \tag{22}$$

Bemerkung. Durch die Gleichungen (18) und (22) für alle n sind die q-Catalanzahlen eindeutig festgelegt. Das verallgemeinert die bekannte Tatsache, daß für $q = 1$ die entsprechenden Hankelmatrizen die Determinante 1 besitzen und daß diese Eigenschaft die Catalanzahlen charakterisiert.

5

Für $r > 2$ gibt es kein direktes Analogon zu (21), weil die Situation nicht mehr symmetrisch ist. Die entsprechenden Matrizen spielen aber auch hier eine wichtige Rolle. Dazu beachten wir, daß jeder positive Gitterweg von (0, 0) nach $(rn + x, x)$ über einen eindeutig bestimmten Punkt der Form $(rn, ri) = (r(n-i) + ri, ri)$ verläuft. Der Restweg liegt dabei in $V_{x,i}$.

Aus (4) folgt daher

$$A^{(r)}(rn+x,x) = \sum_{i=0}^{n} A^{(r)}(rn,ri) \cdot q^{rix} \cdot q^{(x-ri)x + r\binom{i}{2} - \binom{x+1}{2}} \cdot \begin{bmatrix} x \\ i \end{bmatrix}_{q^r} =$$

$$= \sum_{i=0}^{n} A^{(r)}(rn,ri) \cdot q^{\binom{x}{2} + r\binom{i}{2}} \cdot \begin{bmatrix} x \\ i \end{bmatrix}_{q^r}. \tag{23}$$

Setzt man $D_{n,i}^{(r)} = A^{(r)}(rn, ri)$, so endet jeder Weg von $(0,0)$ nach (rn, ri) mit einem Wort aus $V_{r,k}$, $0 \le k \le r$. Bei festem k ist

$$w(V_{r,k}) = \begin{bmatrix} r \\ k \end{bmatrix}_{q^r} \cdot q^{-\binom{r+1}{2}+r\binom{k}{2}+r^2(1-k)}. \tag{24}$$

Daher gilt

$$D_{n,i}^{(r)} = \sum_{k=0}^{r} \begin{bmatrix} r \\ k \end{bmatrix}_{q^r} \cdot q^{-\binom{r+1}{2}+r\binom{k}{2}+r^2(1-k)} \cdot q^{r(ri-r(1-k))} \cdot D_{n-1,i-1+k}^{(r)}$$

und schließlich

$$D_{n,i}^{(r)} = q^{r^2 i-\binom{r+1}{2}} \sum_{k=0}^{r} \begin{bmatrix} r \\ k \end{bmatrix}_{q^r} \cdot q^{r\binom{k}{2}} \cdot D_{n-1,i-1+k}^{(r)}, n \ge 1, i \ge 1$$

mit $D_{n,0}^{(r)} = \delta_{n,0}$ und $D_{0,i}^{(r)} = \delta_{0,i}$.

Bemerkung. Man kann dadurch auch einen anderen Zugang zu den Ergebnissen von [5] erhalten. Dort wurde in Gleichung (4) in etwas anderer Notation $C_{n,i}^{(r)}(q) = G_{n-i}(ri, r, q) q^{r\binom{i}{2}}$ betrachtet. Unter Verwendung von (14) sieht man nun sofort, daß $D_{n,i}^{(r)} = q^{n\binom{r}{2}} C_{n,i}^{(r)}(q^r)$ gilt. Denn die linke Seite ist $A^{(r)}(rn, ri) = q^{(n-i)\binom{r}{2}+\binom{ri}{2}} C_{n-i}(ri, r, q^r) = q^{n\binom{r}{2}} C_{n,i}^{(r)}(q^r)$.

Nun wollen wir die Situation, die zu (21) führte, auf andere Weise verallgemeinern. Jeder Weg von $(0,0)$ nach $(rn + rm + 1, 1)$ läßt sich zerlegen in einen Weg von $(0, 0)$ nach (rn, ri) und einen Restweg von (rn, ri) nach $(rn + rm + 1, 1)$. Wir wollen nun das Gewicht $E_{m+1,i}^{(r)}$ des Restweges bestimmen.

Dann gilt in Analogie zu (21) für $m \ge 1$

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{n} D_{n,i}^{(r)} E_{m,i}^{(r)} &= A^{(r)}(r(m+n-1)+1, 1) \\ &= A^{(r)}(r(m+n-1), r) = D_{m+n-1,1}^{(r)}. \end{aligned} \tag{25}$$

$E_{m,i}^{(r)}$ ist das Gewicht aller positiven Wege von $(0, ri)$ nach $(r(m-1)+1, 1)$. Ein solcher Weg hat $m-i+1$ Abstiege und $(r-1)(m-1)+1-i$ Aufstiege. Das größte i, für welches ein solcher Weg existiert, ist $i = (r-1)(m-1)+1$. Das zu einem solchen Weg gehörende Wort beginnt mit einem Anfangswort aus $V_{r,k}$. Da der Weg auf der Höhe ri beginnt, ist also nach (4) das Gewicht aller solchen Wege mit k Abstiegen gegeben durch $q^{r^2 i} \begin{bmatrix} r \\ k \end{bmatrix}_{q^r} q^{\binom{r}{2}-r^2 k+r\binom{k}{2}}$.

Somit ergibt sich die folgende Rekursionsformel

$$E_{m,i}^{(r)} = q^{r^2 i + \binom{r}{2}} \sum_{k=0}^{r} \begin{bmatrix} r \\ k \end{bmatrix}_{q^r} q^{r\binom{k}{2} - r^2 k} E_{m-1,i+1-k}^{(r)}, m \geq 2,$$

mit den Randbedingungen $E_{1,i}^{(r)} = \delta_{1,i}$ und $E_{m,i}^{(r)} = 0$ für $i \leq 0$.

Man beachte, daß sich für $r > 2$ keine Dreiecksmatrizen mehr ergeben. Im Fall $r = 2$ rechnet man leicht nach, daß hier $E_{m,i}^{(2)} = (D_{m,i}^{(2)}/q^{2i-1})$ gilt, sodaß (21) ein Spezialfall von (25) wird.

6

Wir wollen noch auf eine andere Darstellung der Gewichte $A^{(r)}(rn + x, x)$ hinweisen.

Dazu suchen wir in jedem Weg von (0, 0) nach $(rn + x, x)$ den letzten Abstieg, vor welchem genau $(r-1)n$ Aufstiege liegen. Dieses Anfangsstück hat also $(r-1)n$ Aufstiege und eine gewisse Anzahl von Abstiegen, die wir in der Form $n - k$ schreiben. Das Gewicht aller dieser Anfangsstücke ist $A^{(r)}(rn - k, (r-1)k)$. Der Restweg ist ein Weg von $(0, (r-1)k)$ nach $(k + x, x)$, der mit einem Aufstieg beginnt und genau k Abstiege besitzt.

Aus (5) folgt daher

$$A^{(r)}(rn+x, x) = \sum_{k=0}^{n} A^{(r)}(rn-k, (r-1)k) q^{(r-1)\binom{k+1}{2} + \binom{x}{2}} \begin{bmatrix} x+k-1 \\ k \end{bmatrix}_{q^r}. \tag{27}$$

Wir wollen jedoch auf diese Entwicklung hier nicht näher eingehen, weil analoge Dinge bereits in [6] mit anderen Methoden behandelt wurden.

7

Sei nun $W_{n,k}(x)$ die Menge aller Wörter der Gestalt $(x_{-1})^{k+1} z \in W_n(x)$. Dann ist $W_n(x) = W_{n,0}(x)$. Für $(x_{-1})^k x_i z \in W_{n,k-1}$ zeigt man leicht die Identität $w((x_{-1})^k x_i z) = w(x_i) q^{(k-1)(i+1) - \binom{i+1}{2}} w((x_{-1})^{k-i} z)$.

Sei nun $A_k(n, x) := w(W_{n,k}(x))$. Es ergibt sich

$$A_k(n,x) = A_{k-1}(n,x) - \sum_{i \geq 0} w(x_i) q^{(k-1)(i+1) - \binom{i+1}{2}} A_{k-i-1}(n-1, x). \tag{28}$$

Mit Induktion läßt sich daraus eine explizite Darstellung der Koeffizienten a_{ki} in

$$A_k(n,x) = a_{kk}A(n,x) + a_{k,k-1}A(n-1,x) + \cdots + a_{k0}A(n-k,x) \tag{29}$$

ableiten. Setzt man

$$S_k(x) = \sum_{i=0}^{k} a_{ki}x^i, \tag{30}$$

so verifiziert man sofort die Rekursion

$$S_k(x) = (x - q^{k-1}w(x_0))S_{k-1}(x) - \sum_{i\geq 1} q^{(i+1)(k-1)-\binom{i+1}{2}} w(x_i)S_{k-i-1}(x). \tag{31}$$

Im Fall der Wörter vom Typ r reduziert sich das auf

$$S_n^{(r)}(x) = xS_{n-1}^{(r)}(x) - q^{r(n-1)-\binom{r}{2}} S_{n-r}^{(r)}(x). \tag{32}$$

Daraus ergibt sich nach leichter Rechnung

$$S_n^{(r)}(x) = \sum (-1)^k q^{\binom{k+1}{2}r^2 - k\binom{r+1}{2}} \begin{bmatrix} n-(r-1)k \\ k \end{bmatrix}_{q^r} x^{n-rk}$$

oder

$$S_n^{(r)}(x) = \sum_{k\equiv n (\mathrm{mod}\, r)} (-1)^{(n-k/r)} \begin{bmatrix} k+\frac{n-k}{r} \\ k \end{bmatrix}_{q^r} q^{r^2\binom{\frac{n-k}{r}+1}{2} - \frac{n-k}{r}\binom{r+1}{2}} x^k. \tag{33}$$

8

Man kann die a_{nk} also sehr einfach berechnen. Es stellt sich heraus, daß die Matrix der a_{nk} im wesentlichen die Inverse der Matrix der $A(n,k)$ ist.

Genauer gilt

$$(a_{n,k})_{n,k\geq 0} = \left(q^{-\binom{k+1}{2}} A(n+1,k+1)\right)^{-1}_{n,k\geq 0}. \tag{34}$$

Denn nach (29) ist $\sum_{i=0}^{k} a_{ki}A(i+1,j+1) = A_k(k+1,j+1) = q^{\binom{k+1}{2}}\delta_{kj}$, weil $W_{k+1,k} = \{x_{-1}x_{-1}\ldots x_{-1}\}$ ist und daher $A_k(k+1,x) = q^{\binom{k+1}{2}}$ für $x = k+1$ und sonst 0 ist.

Im Fall r = 2 ergibt sich daher z.B. als Inverse der Matrix

$$\left(q^{-\binom{k+1}{2}}A^{(2)}(n+1,k+1)\right)_0^6$$

die Matrix

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -q & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -q[2]_{q^2} & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ q^6 & 0 & -q[3]_{q^2} & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & q^6\begin{bmatrix}3\\2\end{bmatrix}_{q^2} & 0 & -q[4]_{q^2} & 0 & 1 & 0 \\ -q^{15} & 0 & q^6\begin{bmatrix}4\\2\end{bmatrix}_{q^2} & 0 & -q[5]_{q^2} & 0 & 1 \end{pmatrix}. \tag{35}$$

(Man vergleiche mit (10)).

9

Als nächstes Beispiel wählen wir auf $W_n(x)$ das Gewicht, das durch $w(x_0) = w(x_1) = 1$ und $w(x_i) = 0$, $i > 1$, gegeben ist. Wir betrachten also im wesentlichen Motzkinwörter, d.h. positive Wörter mit den Buchstaben x_{-1}, x_0, x_1. Bezeichnen wir das Gesamtgewicht der Motzkinwörter der Länge n mit $B(n, x)$, so gilt also

$$B(n,x) = q^{x-1}(B(n-1,x-1) + B(n-1,x) + B(n-1,x+1)). \tag{36}$$

Die Matrix $(B(n, k))$ beginnt daher folgendermaßen:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & 1 & q & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & 1+q & q+q^2 & q^3 & 0 & \cdots \\ 0 & 1+2q+q^2 & q+2q^2+q^3+q^4 & q^3+q^4+q^5 & q^6 & \cdots \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \end{pmatrix}$$

Die entsprechenden q-Motzkinzahlen $M_n(q) = B(n+1, 1)$ sind gegeben durch die Folge

$$(1, 1, 1+q, 1+2q+q^2, 1+3q+3q^2+q^3+q^4, 1+4q+6q^2+4q^3 \\ +3q^4+2q^5+q^6, \dots)$$

Aus (6) und (7) ergibt sich die folgende Rekurrenzrelation

$$B(n+1,1) = B(n,0) + B(n,1) + B(n,2) = B(n,1) + B(n,1+1), \text{d.h.}$$

$$\begin{aligned} B(n+1,1) &= B(n,1) + \sum_{k=0}^{n} B(n-k,1)B(k,1)q^k = \\ &= B(n,1) + \sum_{k=1}^{n} B(n-k,1)B(k,1)q^k \end{aligned}$$

und somit

$$M_{n+1}(q) = M_n(q) + \sum_{k=0}^{n-1} M_{n-k-1}(q)M_k(q)q^{k+1} \tag{37}$$

mit $M_0(q) = 1$.

Die zu $\left((B(n,k)/q^{\binom{k}{2}})\right)$ inverse Matrix ist

$$\left(\frac{B(n,k)}{q^{\binom{k}{2}}}\right)^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & 0 & -1-q & 1 & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & q^3 & q^2 & -1-q-q^2 & 1 & 0 & \cdots \\ 0 & -q^6 & q^3+q^6 & q^2+q^3+q^4 & -1-q-q^2-q^3 & 1 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \end{pmatrix}$$

Das entsprechende Polynom $S_k(x) = \sum_{i=0}^{k} a_{ki}x^i$ (vgl. (31)) ist hier gegeben durch die Rekurrenz

$$S_k(x) = (x - q^{k-1})S_{k-1}(x) - q^{2k-3}S_{k-2}(x).$$

Analog zu den Überlegungen, die zu (16) führten, erhält man hier

$$B(m+n-1,1) = \sum_{i=1}^{m} q^{-i+1}B(m,i)B(n,i) \tag{38}$$

oder damit äquivalent

$$M_{m+n}(q) = \sum_{i=1}^{m+1} q^{-i+1}B(m+1,i)B(n+1,i).$$

In Matrixform bedeutet das

$$\begin{pmatrix} B(1,1) & 0 & 0 & \cdots \\ B(2,1) & B(2,2) & 0 & \cdots \\ B(3,1) & B(3,2) & B(3,3) & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \end{pmatrix} \begin{pmatrix} B(1,1) & B(2,1) & B(3,1) & \cdots \\ 0 & \frac{B(2,2)}{q} & \frac{B(3,2)}{q} & \cdots \\ 0 & 0 & \frac{B(3,3)}{q^2} & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} M_0(q) & M_1(q) & M_2(q) & \cdots \\ M_1(q) & M_2(q) & M_3(q) & \cdots \\ M_2(q) & M_3(q) & M_4(q) & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \end{pmatrix}$$

Auf der rechten Seite steht die Hankelmatrix $(M_{i+k}(q))_{i,k\geq 0}$.

Wegen $B(n,n) = q^{\binom{n}{2}}$ ergibt sich für die $n \times n-$Matrix $(M_{i+k}(q))_{i,k=0}^{n-1}$ als Determinante

$$\det(M_{i+k}(q))_{i,k=0}^{n-1} = q^{\frac{n(n-1)(2n-1)}{6}} = q^{\sum_{i<n} i^2}. \tag{39}$$

10

Wir wollen nun auch die Determinante der Hankelmatrix will $(M_{i+k-1}\ (q))_{i,k=1}^{n}$ berechnen. Dazu verwenden wir eine Methode aus [2]. Aus (38) folgt

$$(M_{i+k-1}(q))_{i,k=1}^{n} = (B(i+1,k))_{i,k=1}^{n}(C(i,k))_{i,k=1}^{n},$$

wobei $C(i,k) = B\,(k,i)q^{-i+1}$ ist.

Nun folgt aus (36), daß

$$(B(i+1,k))_{i,k=1}^{n} = (B(i,k))_{i,k=1}^{n}(D(i,k))_{i,k=1}^{n}$$

gilt, wobei $D(i,k) = q^{k-1}$ für $i = k-1$, k, $k+1$ ist und sonst verschwindet. Man rechnet nun leicht nach, daß
$\det\,(D(i,k))_1^n = q^{\binom{n}{2}}d_n$ ist, wobei $d_1 = 1$, $d_2 = 0$, $d_3 = -1$, $d_4 = -1$, $d_5 = 0$, $d_6 = 1$ ist und periodisch mit Periode 6 ist.
Somit erhalten wir

$$\det(M_{i+k-1}(q))_{i,k=1}^{n} = q^{\binom{n}{2}} d_n q^{\frac{n(n-1)(2n-1)}{6}}. \tag{40}$$

Für $q = 1$ wurden (39) und (40) in [1] bewiesen.

Mit derselben Methode, die zu (19) führte, zeigt man, daß auch

$$B(n,i)B(n+1,j) - B(n+1,i)B(n,j) \tag{41}$$

für $i \leq j$
nichtnegative Koeffizienten besitzt und daß für die q-Motzkinzahlen

$$M_{n-1}(q)M_{n+1}(q) - (M_n(q))^2 \tag{42}$$

nichtnegative Koeffizienten besitzt. Das ist ein q-Analogon der entsprechenden Aussagen in [1].

Unmittelbar aus (37) ergibt sich auch, daß $M_n(q) - (1+q)^{n-1}$ nichtnegative Koeffizienten hat.

Es scheint keinen einfachen Zusammenhang mit den in [3] studierten q-Motzkinzahlen zu geben. Es sei nur eine weitere Methode angegeben, wie man zu diesen gelangen kann: Man beachte, daß die Gouldpolynome $G_n(x, r, 1)$ auch die Anzahl der n-tupel $c = (c_1, c_2, \ldots c_n)$ natürlicher Zahlen mit $0 \leq c_1 < x$, $0 \leq c_{i+1} < c_i + r$, $i = 1, 2, \ldots, n-1$ zählen, wie wir bereits gesehen haben (vgl. auch [6]).

Sei nun $H_n(x, r)$ die Anzahl jener solchen n-tupel, welche überdies $c_{i+1} \neq c_i$ für alle i erfüllen. Aus dem Prinzip der Inklusion und Exklusion ergibt sich sofort, daß

$$H_{n+1}(x,r) = \sum_{i=0}^{n} (-1)^{n-i} \binom{n}{i} G_{i+1}(x,r,1) \tag{43}$$

gilt.

11

Für $r = 2$ ist $H_{n+1}(1, 2) = M_n$, die n-te Motzkinzahl (vgl [3] oder weiter unten (48)). Wir wollen daher $M_n^r := H_{n+1}(1,r)$ als verallgemeinerte Motzkinzahlen bezeichnen. Sie stehen also zu den Catalanzahlen in der Beziehung

$$M_n^r = \sum_{i=0}^{n} (-1)^{n-i} \binom{n}{i} C_{i+1}^r. \tag{44}$$

Aus der obigen kombinatorischen Deutung ergibt sich sofort die Rekursionsformel

$$H_n(x+1,r) = H_n(x,r) + H_{n-1}(x,r) + H_{n-1}(x+r,r) - H_{n-1}(x+1,r). \tag{45}$$

Denn $H_n(x+1, r) - H_n(x, r)$ zählt alle n-tupel der Gestalt $(x, c_2, \ldots, c_n)$ mit $c_2 < x$ oder $x + 1 \leq c_2 < x + r$.

Wenn wir stattdessen für das n-tupel $c=(c_1, c_2, \ldots, c_n)$ das Gewicht $w(c) := q^{c_1+\cdots+c_n}$ betrachten, so ergibt sich analog für das Gewicht $H_n(x, r, q)$ die Rekursion

$$\begin{aligned} &H_n(x,r,q) - H_n(x-1,r,q) \\ &= q^{x-1}(H_{n-1}(x-1,r,q) - H_{n-1}(x,r,q) + H_{n-1}(x+1,r,q)) \end{aligned} \tag{46}$$

Es gilt auch in Analogie zu (7) die Formel

$$H_n(x+y,r,q) = \sum_{k=0}^{n} q^{kx} H_k(y,r,q) H_{n-k}(x,r,q). \tag{47}$$

Zum Beweis beachten wir, daß es für jedes n-tupel $c=(c_1, \ldots, c_n)$ mit $0 \leq c_1 < x+y, 0 \leq c_{i+1} < c_i + r,\ i=1,2,\ldots,n-1$, und $c_{i+1} \neq c_i$ ein eindeutig bestimmtes $k \geq 0$ gibt, sodaß gilt $c_i \geq x,\ i=1,2,\ldots,k,\ c_{k+1} < x$.

Dann ist bei festem k das Gesamtgewicht all dieser Wörter gegeben durch $q^{kx} H_k(y,r,q) H_{n-k}(x,r,q)$.

Für die Motzkinzahl $M(n,2,q) := H_{n+1}(1,2,q)$ ergibt sich daher aus (46) und (47) mit derselben Argumentation wie in (37) die Formel

$$M(n+1,2,q) = q^{n+1} M(n,2,q) + \sum_{k=0}^{n-1} q^{k+1} M(k,2,q) M(n-k-1,2,q). \tag{48}$$

Das ist im wesentlichen dasselbe wie das q-Analogon $\tilde{M}_n(q)$ aus [3], (2.2), denn man rechnet leicht nach, daß $\tilde{M}_n(q) = q^{n+1} M(n,2,q)$ ist.

Man kann daher $M(n,r,q) := H_{n+1}(1, r, q)$ als q-Analogon der verallgemeinerten Motzkinzahlen interpretieren.

Wir wollen jedoch noch auf ein anderes q-Analogon hinweisen, welches sich für $r=2$ auf die oben eingeführten $M_n(q)$ reduziert.

Aus (43) ist klar, daß $H_n(x, r)$ ein Polynom vom Grad n ist mit $H_0(x, r) = 1$ und $H_n(0, r) = 0$ für $n > 0$.

Es gibt daher eine eindeutig bestimmte Darstellung der Gestalt

$$H_n(x,r) = \sum_{k=0}^{n} b_{n,k} \binom{x}{k}. \tag{49}$$

Dabei ist $b_{n+1,1} = H_{n+1}(1,r) = M_n^r$.

Schreibt man (45) in der Gestalt

$$\Delta H_n(x,r) = H_{n-1}(x,r) + (E^r - E) H_{n-1}(x,r),$$

wobei $\Delta f(x) = f(x+1) - f(x)$ der Differenzenoperator und $E = 1 + \Delta$ der Verschiebungsoperator $Ef(x) = f(x+1)$ ist, so ergibt sich

$$\sum b_{n,k}\binom{x}{k-1} = \sum b_{n-1,k}\binom{x}{k} + ((1+\Delta)^r - 1 - \Delta)\sum b_{n-1,k}\binom{x}{k} \text{ oder}$$

nach kurzer Rechnung

$$b_{n,k} = b_{n-1,k-1} + (r-1)b_{n-1,k} + \binom{r}{2}b_{n-1,k+1} + \binom{r}{3}b_{n-1,k+2} + \cdots$$

Z.B. beginnt für $r = 3$ die Matrix $(b_{n,k})$ mit

$$(b_{n,k})_0^4 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 7 & 4 & 1 & 0 \\ 0 & 27 & 18 & 6 & 1 \end{pmatrix}$$

Die entsprechenden Motzkinzahlen sind gegeben durch $\{1, 2, 7, 27, 114, 507, 2342, 11125, \ldots\}$.

Man kann diese Relationen als Ausgangspunkt nehmen, um auf den Mengen $W_n(x)$ ein Gewicht einzuführen, welches die verallgemeinerten Motzkinzahlen und ein q-Analogon davon liefert.

Dazu definiere man

$$w(x_0) = r - 1, w(x_i) = \binom{r}{i+1}, i \geq 1. \tag{50}$$

Für das Gesamtgewicht der Menge $W_n(x)$ ergibt sich damit

$$\begin{aligned} B(n,x,r) = q^{x-1}(B(n-1,x-1,r) + (r-1)B(n-1,x,r) \\ + \sum_{i\geq 1}\binom{r}{i+1}B(n-1,x+i,r)) \end{aligned} \tag{51}$$

Im Fall $r = 2$ reduziert sich das auf (36).

Auf Einzelheiten wollen wir hier aber nicht mehr näher eingehen.

Literatur

[1] Aigner, M.: Motzkin numbers. Eur. J. Combinatorics **19**, 663–675 (1998).
[2] Aigner, M.: Catalan-like numbers and determinants. J. Comb. Theory **A87**, 33–51 (1999)

[3] Barcucci, E., Del Lungo, A., Fedou, J. M., Pinzani, R.: Steep Polyominoes, q-Motzkin numbers and q-Bessel Functions. Discr. Math. **189**, 21–42 (1998).
[4] Cigler, J.: Operatormethoden für q-Identitäten I. Mh. Math. **88**, 87–105 (1979).
[5] Cigler, J.: Operatormethoden für q-Identitäten IV. ÖAW Sitzungsber. **205**, 169–174 (1996).
[6] Cigler, J.: Operatormethoden für q-Identitäten V. ÖAW Sitzungsber. **205**, 175–182 (1996).
[7] Cigler, J.: Operatormethoden für q-Identitäten VI. ÖAW Sitzungsber. **206**, 253–266 (1997).
[8] Fürlinger, J., Hofbauer, J.: q-Catalan numbers. J. Comb. Theory A, **40**, 248–264 (1985).
[9] Gessel, I.: A noncommutative generalization and q-analog of the Lagrange inversion formula. TAMS **257**, 455–482 (1980).
[10] Krattenthaler, C.: Counting lattice paths with a linear boundary II. ÖAW Sitzungsber. **198**, 171–199 (1989).
[11] Schützenberger, M. P.: Une interprétation de certaines solutions de l'équation fonctionelle: $F(x+y)=F(x)F(y)$, C.R. Acad. Sci. Paris, **236**, 352–353 (1953).

Anschrift des Verfassers: Prof. Dr. J. Cigler, Institut für Mathematik, Strudlhofgasse 4, A-1090 Wien.