Sitzungsber. Abt. II (1999) 208: 165–170

Über die stetigen Lösungen der Gołąb-Schinzel-Geichung auf $\mathbb{R}_{\geq 0}$

Von

L. Reich

(Vorgelegt in der Sitzung der math.-nat. Klasse am 16. Dezember 1999 durch das w. M. Ludwig Reich)

Summary. We construct the general continuous solution $f : \mathbb{R}_{\geq 0} \to \mathbb{R}$ of the functional equation $f(x + yf(x)) = f(x)f(y)$, if $x, y, x + yf(x) \geq 0$. Mathematics Subject Classification (1991): 39B12, 39B22, 39B52.

Einleitung

In [2] wurden alle stetigen Lösungen f: $\mathbb{R}_{\geq 0} \to \mathbb{R}$ der Funktionalgleichung

$$f(x + yf(x)) = f(x)f(y), \text{ falls } x, y, x + yf(x) \geq 0 \qquad (\mathrm{GS}')$$

bestimmt. Dort findet der Leser die Motivation für das Studium dieses Problems und die wichtigsten Literaturhinweise über die Funktionalgleichung von Gołąb-Schinzel in den bisher untersuchten Situationen. In der vorliegenden Note betrachten wir diese Funktionalgleichung unter etwas schwächeren Bedingungen als in [2]. Wir bestimmen die stetigen Lösungen $f : \mathbb{R}_{\geq 0} \to \mathbb{R}$ von

$$f(x + yf(x)) = f(x)f(y), \quad x, y, x + yf(x) \geq 0. \qquad (\mathrm{GS})$$

Wir verwenden dabei eine Methode, die sich hauptsächlich auf das Nullstellenverhalten der Lösungen f von (GS) stützt. Das Hauptergebnis von [2] ist in unserem enthalten.

Der Verfasser dankt an dieser Stelle den Herren J. Aczél, P. Flor und J. Schwaiger für wertvolle Hinweise.

A

Wir bestimmen zuerst die *konstanten* Lösungen f von (GS). Falls $f(x) = c, x \in \mathbb{R}_{\geq 0}$, so setzen wir in (GS) $y = 0$ bei beliebigem $x \geq 0$ und finden $c^2 = c$, also $f = 1$ oder $f = 0$. Wir schließen diese Fälle von nun an aus.

Die möglichen *Anfangswerte* $f(0)$ von Lösungen f von (GS) folgen ebenfalls aus (GS) mit $x = 0, y = 0$. Da demnach $f(0) = f(0)^2$, so ist $f(0) = 0$ oder $f(0) = 1$. Falls $f(0) = 0$, so ergibt (GS) mit $y = 0$ und beliebigem $x \in \mathbb{R}_{\geq 0}$

$$f(x) = f(x + 0f(x)) = f(x)f(0) = 0, \quad x \geq 0.$$

Eine *nichtkonstante* Lösung hat also den *Anfangswert* $f(0) = 1$. Unter einer *Lösung* von (GS) verstehen wir in dieser Arbeit immer eine stetige Lösung.

B

Im folgenden werden die *Nullstellen* von Lösungen wichtig sein. Es gilt

Lemma 1. *a) Es sei z Nullstelle der Lösung f von* (GS). *Dann ist auch*

$$f_z^{**}(x) := x + z f(x) \tag{1}$$

Nullstelle von f, falls $x + z f(x) \geq 0$.

b) Es sei f Lösung von (GS), *und es existiere ein $\xi \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ mit $f(\xi) < 1$. Dann ist*

$$f^*(\xi) := \frac{\xi}{1 - f(\xi)} \tag{2}$$

Nullstelle von f.

c) Es sei f Lösung von (GS). *Dann ist f nullstellenfrei genau dann, wenn $f \geq 1$.*

Beweis. a) Falls $f(z) = 0$ für ein $z \geq 0, x \geq 0$ und $x + z f(x) \geq 0$, so ergibt (GS)

$$f(x + z f(x)) = f(x)f(z) = 0,$$

also ist $f_z^{**}(x)$ Nullstelle von f.

b) Ist $\eta := f(\xi) < 1$, so ist $f^*(\xi) = \xi/(1 - \eta) > 0$, also ergibt (GS)

$$f(\xi)f\left(\frac{\xi}{1-\eta}\right) = f\left(\xi + \frac{\xi}{1-\eta}\eta\right) = f\left(\frac{\xi}{1-\eta}\right)$$

wegen $\xi + \frac{\xi}{1-\eta}\eta = \frac{\xi}{1-\eta}$, also $f\left(\frac{\xi}{1-f(\xi)}\right) = 0$, da $f(\xi) \neq 1$.

c) Ist $f(\xi) < 1$ für ein $\xi \in \mathbb{R}_{\geq 0}$, so hat f eine Nullstelle gemäß b). Also gilt $f \geq 1$, falls f eine Lösung von (GS) ohne Nullstelle ist. ■

C

Wir bestimmen nun die (notwendige) Gestalt der Lösungen f von (GS) mit $f \geq 1$, also die *Lösungen ohne Nullstellen* (gemäß Lemma 1c).

Lemma 2. *Es sei f Lösung von* (GS) *und $f \geq 1, f \neq 1$. Dann ist f streng monoton wachsend.*

Beweis. (i) Falls $f \geq 1$, so gilt für $x, y \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ wegen (GS)

$$f(x + yf(x)) = f(x)f(y) \geq f(x).$$

Es sei $h \geq 0$. Wähle $y = h/f(x)$. Dann folgt daraus $f(x + h) \geq f(x)$, falls $x \geq 0$. Also ist f monoton wachsend.

(ii) Es sei $f \geq 1$, nicht *streng* monoton wachsend. Dann beweisen wir $f = 1$, was aber schon ausgeschlossen ist. Es sei $0 \leq a < b$ und $f(a) = f(b)$. Nach (i) gilt $f(x) = c \geq 1$ für $x \in [a, b]$ mit $c = f(a)$. Ist $x \in [a, b[$, so existiert ein $\delta_x > 0$, sodaß für alle y mit $0 \leq y < \delta_x$ auch $a \leq x + yf(x) \leq x + cy < b$ gilt, somit wegen (GS)

$$c = f(x + yf(x)) = f(x)f(y) = cf(y),$$

also $f(y) = 1$, falls $0 \leq y < \delta_x$. Für ein festes $y_0 \in]0, \delta_x[$ und alle $u \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ folgt daher aus (GS)

$$f(u + y_0) = f(y_0 + uf(y_0)) = f(y_0)f(u) = f(u).$$

Dies bedeutet aber, daß f konstant ist, also $f = 1$. (Denn $f(u + y_0) = f(u)$, für alle $u \in \mathbb{R}_{\geq 0}$, impliziert $f(u + my_0) = f(u)$, für alle $u \geq 0$ und alle $m \in \mathbb{N}_0$. Ist nun $v \in \mathbb{R}_{\geq 0}$, so existiert ein $m \in \mathbb{N}_0$, sodaß $0 \leq v - my_0 < y_0$, also $f(v) = f((v - my_0) + my_0) = f(v - my_0) = 1$.)

(iii) Da wir nur mehr nichtkonstante Lösungen von (GS) untersuchen, so ist also im vorliegenden Fall $f \geq 1$ streng monoton wachsend. Wir wenden nun den bekannten Kunstgriff von Gołąb-Schinzel an (siehe [1], [3]): Für $x,\ y \geq 0$ gilt

$$f(x + y\,f(x)) = f(x)f(y) = f(y + xf(y)),$$

somit $x + y\,f(x) = y + x\,f(y)$, und daraus folgt leicht

$$f(x) = \gamma x + 1, x \in \mathbb{R}_{\geq 0},$$

mit $\gamma > 0$.

D

Es sind jetzt die Lösungen von (GS) mit Nullstellen zu bestimmen. Da hier $f \neq 0$, so ist nach. **A.** $f(0) = 1$, also gibt es eine kleinste Nullstelle

$x_0 > 0$ von f. Wir betrachten zuerst den Fall, daß f eine Nullstelle besitzt und nichtnegativ ist.

Lemma 3. *Ist f eine nichtnegative, nichtkonstante Lösung von* (GS) *und hat es eine Nullstelle, dann gilt*

$$f(x) = \begin{cases} 1 - x/x_0, & 0 \le x \le x_0, \\ 0, & x \ge x_0, \end{cases}$$

wobei x_0 die kleinste Nullstelle von f ist.

Beweis. (i) Im ersten Schritt beweisen wir $f|_{[x_0,\infty[} = 0$. Es sei $x \in \mathbb{R}_{\ge 0}$. Da $x + x_0 f(x) \ge 0$ und $f^{**}_{x_0} : x \mapsto x + x_0 f(x)$ stetig ist, so ist nach Lemma 1a) $J := f^{**}_{x_0}(\mathbb{R}_{\ge 0})$ ein aus Nullstellen von f bestehendes Intervall. Es ist $f^{**}_{x_0}(x) \ge x$, somit sup $J = +\infty$. Ferner ist $f^{**}_{x_0}(x_0) = x_0$, und nach Definition von x_0 gilt $x_0 \le$ inf J, somit $J = f^{**}_{x_0}(\mathbb{R}_{\ge 0}) = [x_0, \infty[$ und $f|_{x_0,\infty[} = 0$.

(ii) Für $x \in [0, x_0[$ gilt $f(x) > 0$, weil $f(0) = 1$ und x_0 die kleinste Nullstelle von f ist. Somit ergibt (GS) mit $x, y \in [0, x_0[$ und folglich $x + y f(x) > 0$

$$f(x + y f(x)) = f(x) f(y) > 0.$$

Somit ist nach Teil (i) des Beweises $x + y f(x) < x_0$. Der Grenzübergang $y \nearrow x_0$ in der letzten Ungleichung ergibt

$$x + x_0 f(x) \le x_0, \quad \text{falls } x \in [0, x_0[. \tag{3}$$

Andererseits ist wegen $x + x_0 f(x) > 0$ $f^{**}_{x_0}(x) = x + x_0 f(x)$ Nullstelle von f, siehe Lemma 1, also

$$x + x_0 f(x) \ge x_0, \quad \text{falls } x \in [0, x_0[. \tag{4}$$

(3) und (4) besagen $f(x) = 1 - x/x_0$ für $x \in [0, x_0[$.

E

Es bleibt die Untersuchung der *Lösungen f von* (GS), *die negative Werte annehmen*. Gibt es ein ξ mit $f(\xi) < 0$, so ist f nach **A**. nichtkonstant, also $f(0) = 1$. Somit existiert nach dem Zwischenwertsatz ein $x_0 > 0$ mit $f(x_0) = 0$ und $f(x) > 0$ für $x \in [0, x_0[$.

Lemma 4. *Ist f Lösung von* (GS) *und gibt es ein ξ mit $f(\xi) < 0$, dann gilt*

$$f(x) < 0 \quad \textit{für } x \ge \xi.$$

Beweis. Angenommen, es existiere ein $y > \xi$ mit $f(y) \geq 0$. Dann existiert, da f stetig ist, ξ_1 mit $\xi_1 > \xi, f(\xi_1) = 0$ und $f(x) < 0$ für $\xi \leq x < \xi_1$. Da f stetig ist, ist auch $f^{**}_{\xi_1} : x \mapsto x + \xi_1 f(x)$ stetig und $f^{**}_{\xi_1}(\xi_1) = \xi_1 + \xi_1 \cdot 0 = \xi_1 > \xi > 0$. Somit gibt es ein $\delta > 0$, sodaß auch

$$f^{**}_{\xi_1}(x) > \xi > 0, \quad \text{falls } \xi < \xi_1 - \delta < x < \xi_1.$$

Nach Lemma 1b) ist für diese $x f^{**}_{\xi_1}(x)$ Nullstelle von f, d.h. $f(x + \xi_1 f(x)) = 0$. Andererseits haben wir $\xi < f^{**}_{\xi_1}(x) < \xi_1$, für $\xi_1 - \delta < x < \xi$, wenn hinreichend klein gewählt wird. Dann ist aber $f(f^{**}_{\xi_1}(x)) = f(x + \xi_1 f(x)) < 0$ wegen $\xi < x < \xi_1$, während wir vorhin $f(x + \xi f(x)) = 0$ gezeigt hatten. Somit haben wir einen Widerspruch zur Existenz eines $y > \xi$ mit $f(y) \geq 0$, und Lemma 4 ist bewiesen. ■

Da $f(0) = 1 > 0$ und $f(\xi) < 0$, so existiert, da f stetig ist, ein $x_1 > 0$ mit $x_0 \leq x_1, f(x) < 0$ für $x > x_1, f(x) \geq 0$ für $x \in [x_0, x_1]$ und $f(x) > 0$ für $x \in [0, x_0[$. Insbesondere gilt $f(x_0) = 0$ und x_0 ist die kleinste Nullstelle von f, sowie $f(x_1) = 0$.

Lemma 5. *Es sei f Lösung von* (GS) *mit einem negativen Funktionswert*, x_0 *sei die kleinste Nullstelle von f. Dann ist*

$$f(x) = 1 - x/x_0, \quad \textit{falls } x \in [0, \infty[.$$

Beweis. (i) Im ersten Schritt beweisen wir $f(x) = 0$ für $x_0 \leq x \leq x_1$ (mit den vorhin definierten Zahlen x_0 und x_1). Für diese x ist $f^{**}_{x_0}(x) = x + x_0 f(x) \geq 0$, also, da $f(x_0 = 0$, ist $f^{**}_{x_0}(x)$ Nullstelle von f und $f^{**}_{x_0}(x) \geq x \geq x_0$, sowie $f^{**}_{x_0}(x) \leq x_1$ da $f(x) < 0$ für $x x_1$. Da $f^{**}_{x_0}$ stetig ist, so ist $I := f^{**}_{x_0}([x_0, x_1])$ ein aus Nullstellen von f bestehendes Intervall mit $x_0 \leq \inf I \leq \sup I \leq x_1$, andererseits $f^{**}_{x_0}(x_0) = x_0 \in I, f^{**}_{x_0}(x_1) = x_1 + x_0 f(x_1) = x_1 + x_0 \cdot 0 = x_1 \in I$, also $I = [x_0, x_1]$, d.h. $f|_{[x_0, x_1]} = 0$.
(ii) Im zweiten Schritt zeigt man $f(x) = 1 - x/x_0$ auf $[0, x_0]$. Der Beweis ist derselbe wie in Lemma 3, da auch in der vorliegenden Situation $f(x) > 0$ genau dann gilt, wenn $x \in [0, x_0[$. Dies folgt aus der Bemerkung unmittelbar vor Lemma 5, wonach $f(x) > 0$ für $x \in [0, x_0[$, sowie aus dem Teil (i) des vorliegenden Lemmas, nach dem $f(x) = 0$ für $x \in [x_0, x_1]$.

(iii) Nun beweisen wir $x_0 = x_1$. Angenommen, es sei $x_0 < x_1$. Es seien $x \in [0, x_0[$ und $y > x_1$ beliebig. Dann ist $f(x) > 0$ und $f(y) < 0, x + yf(x) > 0$ und aus (GS) folgt

$$f(x + yf(x)) = f(x)f(y) < 0,$$

somit $x + yf(x) > x_1$. Mit $y \searrow x_1$ ergibt sich aus der letzten Ungleichung $x + x_1 f(x) \geq x_1$ für $x \in [0, x_0[$, also

$$f(x) \geq 1 - x/x_1, \quad \text{für } x \in [0, x_0]. \tag{5}$$

Da wir in Teil (ii) des Beweises schon

$$f(x) = 1 - x/x_0, \quad \text{für } x \in [0, x_0[, \tag{6}$$

gezeigt haben, folgt aus (5) und (6) und $1 - x/x_0 < 1 - x/x_1$ für $x_0 < x_1$ der Widerspruch

$$f(x) = 1 - x/x_0 < 1 - x/x_1 \leq f(x).$$

Somit gilt $x_0 = x_1$.

(iv) Schließlich beweisen wir, daß $f(x) = 1 - x/x_0$ auch auf $[x_0, \infty[$ gilt. Jedenfalls ist $f(x) < 0$ für $x > x_0 (= x_1)$, also $f^*(x) = x/1 - f(x)$ nach Lemma 1b) Nullstelle von f. Da f die einzige Nullstelle x_0 hat, so gilt

$$f^*(x) = \frac{x}{1 - f(x)} = x_0,$$

also $f(x) = 1 - x/x_0$ für alle $x \in \mathbb{R}_{\geq 0}$. ■

Wir haben somit die notwendige Form der stetigen Lösungen von (GS) gefunden. Man rechnet leicht nach, daß alle diese wirklich Lösungen sind. Somit gilt folgender

Satz. *Die stetigen Lösungen von* (GS) *sind gegeben durch*

(a) $f(x) = \gamma x + 1, x \in \mathbb{R}$, *mit einem beliebigen* $\gamma \geq 0$,

(b) $f = 0$,

(c) $f(x) = \begin{cases} 1 - x/x_0, & x \in [0, x_0[, \\ 0, & x \geq x_0 \end{cases}$, *mit einem beliebigen* $x_0 > 0$ *und*

(d) $f(x) = 1 - x/x_0, x \in \mathbb{R}_{\geq 0}$, *mit einem beliebigen* $x_0 > 0$. ■

Bemerkung. Wir haben in unserem Satz das Hauptergebnis von [2] mit erhalten. Falls nämlich f Lösung von (GS$'$) ist, so auch von (GS). Andererseits erfüllen die in unserem Satz angegebenen Funktionen alle (GS$'$) (d.h. die Gołąb-Schinzel-Gleichung für alle x, $y \in \mathbb{R}_{\geq 0}$).

Literatur

[1] Aczél, J.: Lectures on Functional equations and their applications, pp. 311–318. Academic Press, New York-London, 1966.

[2] Aczél, J. Schwaiger, J.: Continuous solutions of the Gołąb-Schinzel equation on the nonnegative reals and on related domains. Sb. Öster. Akad.Wiss. **208**, 171–177 (1999).

[3] St. Golab and A. Schinzel, Sur l'équation fonctionelle $f(x + yf(x)) = f(x)f(y)$. Publ. Math. Debrecen **6**, 113–125 (1960).

Anschrift des Verfassers: Prof. Dr. L Reich, Institut für Mathematik, Universität Graz, Heinrichstr. 36, A-8010 Graz.